

GEOMETRIA 4
ESERCITAZIONE SCRITTA DELL'8-04-2009

Esercizio 1. Siano π_1, π_2, π_3 le applicazioni $\pi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definite da

$$\begin{cases} \pi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3), \\ \pi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3), \\ \pi_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2). \end{cases}$$

Si dimostri che, se M è una sottovarietà differenziabile di dimensione 2 di \mathbb{R}^3 , per ogni punto p di M vi è un intorno aperto U di p in M ed un indice i , con $1 \leq i \leq 3$, tale che $(U, \pi_i|_U)$ sia una carta locale di M .

Esercizio 2. Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (a \cos t, t, b \sin t).$$

Si dica per quali valori a, b la curva è biregolare in tutti i suoi punti. Si calcoli la torsione e il riferimento mobile al variare di t , quando questi sono definiti.

Esercizio 3. Si consideri la curva piana $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\cos t, \cos t \sin t)$$

di periodo 2π .

Dopo aver dimostrato che la curva è regolare ed averne tracciato un grafico approssimativo se ne calcoli l'indice di rotazione.