

**GEOMETRIA 4**  
**ESERCITAZIONE SCRITTA DELL'8-04-2009**

**Esercizio 1.** Siano  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  le applicazioni  $\pi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definite da

$$\begin{cases} \pi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3), \\ \pi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3), \\ \pi_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2). \end{cases}$$

Si dimostri che, se  $M$  è una sottovarietà differenziabile di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^3$ , per ogni punto  $p$  di  $M$  vi è un intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $M$  ed un indice  $i$ , con  $1 \leq i \leq 3$ , tale che  $(U, \pi_i|_U)$  sia una carta locale di  $M$ .

**Esercizio 2.** Si consideri la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (a \cos t, t, b \sin t).$$

Si dica per quali valori  $a, b$  la curva è biregolare in tutti i suoi punti. Si calcoli la torsione e il riferimento mobile al variare di  $t$ , quando questi sono definiti.

**Esercizio 3.** Si consideri la curva piana  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\cos t, \cos t \sin t)$$

di periodo  $2\pi$ .

Dopo aver dimostrato che la curva è regolare ed averne tracciato un grafico approssimativo se ne calcoli l'indice di rotazione.