ESAME DI GEOMETRIA 4

7/2/2008

Esercizio 1

Sia

$$Y = S^1 \times S^1 \times \{0,1\} = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}^2_y \times \mathbb{R} \mid |x| = 1,\ |y| = 1,\ t = \pm 1\},$$

con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^5$, l'unione disgiunta di due copie del toro bidimensionale. Sia $\sim$ la relazione d'equivalenza:

$$(x,y,t) \sim (x',y',t') \Longleftrightarrow \begin{cases} (x,y,t) = (x',y',t') \quad \text{oppure} \\ x = x' = e_1,\ y = y' = e_1,\ tt' = -1 \quad \text{oppure} \\ x = x' = e_2,\ y = y' = e_2,\ tt' = -1, \end{cases}$$

ove e_1, e_2 è la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Sia $X = Y/\sim$. Si fissi un punto base $x_0 \in X$ e si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$.

Esercizio 2

Sia $\mathbf{G}$ l'insieme di matrici:

$$\mathbf{G} = \{a \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid a\,{}^t a = I_2\}.$$

Si dimostri che G è un gruppo ed una sottovarietà differenziabile di $\mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{R}^8$. Si dimostri che $\mathbf{G}$ ha due componenti connesse, ciascuna diffeomorfa al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t\cos(t) \\ y = t\sin(t) \\ z = t \end{cases}$$

Si determini il dominio di regolarità e quello di biregolarità della curva. Inoltre si calcoli il raggio di curvatura della curva in tutti i punti dove esso è definito.

Esercizio 4

Si consideri il grafico S della funzione in due variabili

$$z = x^2 + y^3$$

Si calcoli la II forma fondamentale nel punto $(1,1,2)$, e si calcoli in tale punto la curvatura dell'intersezione di S con il piano $x + y + z = 4$.