

GEOMETRIA 4
ESERCITAZIONE SCRITTA DEL 3-6-2009

Si risolvano i seguenti esercizi spiegando in dettaglio i procedimenti seguiti.

Esercizio 1. Sia X l'insieme dello spazio \mathbb{R}^3 definito dall'unione

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \text{ ove}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ X_2 &= \{0 \leq z \leq \sqrt{2}, (z - \sqrt{2})^2 = x^2 + y^2\}, \\ X_3 &= \{-\sqrt{2} \leq z \leq 0, (z + \sqrt{2})^2 = x^2 + y^2\}. \end{aligned}$$

Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, p)$, ove p è un punto fissato.

Esercizio 2. Si consideri la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u) = \cos(u) - v \sin(u) \\ y(u) = \sin(u) + v \cos(u) \\ z(u) = u + v. \end{cases}$$

Si determini il dominio di regolarità della superficie.

Si calcoli la I forma fondamentale.

Si calcoli l'area della porzione di superficie corrispondente a $0 \leq u \leq 1$ e $1 \leq v \leq 2$.

Esercizio 3. Sia S la superficie ottenuta ruotando la parabola di equazione $x = z^2$ nel piano Oxz intorno all'asse z .

Si calcoli la II forma fondamentale nel punto $P = (1, 0, 1)$ e si riconosca il tipo del punto P .

Si calcoli la curvatura in P della curva intersezione di S e del piano $x + y + z = 2$.