Esame di Geometria 4

16/7/2007

Esercizio 1
Sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R^3}$ definito da:

$$X = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{z^2 = 1\}\,.$$

Si fissi un punto $x_0 \in X$ e si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$.

Esercizio 2 Si consideri il sottoinsieme X del piano proiettivo complesso $\mathbf{CP^2}$ descritto nelle coordinate omogenee z_0, z_1, z_2 dall'equazione:

$$z_0 z_1 z_2 = 0\,.$$

Si dimostri che X è uno spazio topologico compatto e connesso. Si fissi un punto $p_0 \in X$ e si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$.

Esercizio 3 Si consideri la curva γ in $\mathbf{R^3}$ definita da:

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t^3 \\ z(t) &= t^4. \end{cases}$$

Si determini il dominio di regolarità e quello di biregolarità. Si studi il segno della torsione nei punti di γ dove essa è definita.

Esercizio 4 Si consideri la superficie S costituita dall'unione delle rette normali all'elica di equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) &= cos(t) \\ y(t) &= sin(t) \\ z(t) &= t. \end{cases}$$

Si determini il dominio in cui S è regolare. Si calcoli la curvatura Gaussiana nei punti di S dove essa è definita.