

II Esonero di Geometria e Algebra (Prof. Letizia)

1/6/2006

Svolgere i seguenti esercizi spiegando i procedimenti.

Esercizio 1

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$\{(1, 0, 1, 1), (1, -1, -1, 0), (0, 1, 2, 1)\}$$

e $W \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Si trovi una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

Esercizio 2

Data la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

si trovino basi di $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ al variare di k .

Esercizio 3

Sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare tale che

$$g(1, -1, 0) = (1, -1), \quad g(0, -1, 1) = (0, -1), \quad g(1, 0, 1) = (1, 0).$$

Si calcoli la matrice di g rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .

Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Si calcolino gli autovettori di A , le basi degli autospazi corrispondenti, e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 5

Si trovi una base ortonormale del sottospazio $S \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$$

e una base ortonormale del sottospazio $S^\perp \subset \mathbb{R}^4$.