

26 Febbraio 2019

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 1, 0)$. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si determini la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$
- (b) Si determini la dimensione e una base della somma $U + V$.
- (c) Si scriva, se possibile, il vettore $w = (0, 1, 0, 1)$ come $w = u + v$ con $u \in U$ e $v \in V$.

2) Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Sia $f : V \rightarrow V$ la trasformazione lineare definita da

$$f(p(x)) = (x - 1)p'(x)$$

Per esempio $f(x^2) = (x - 1)(2x) = 2x^2 - 2x$.

- (a) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.
- (b) Determinare dimensioni e basi di $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.
- (c) Determinare tutti i polinomi $q(x) \in V$, se esistono, tali che $f(q(x)) = x^2 - 1$.

3) Nello spazio euclideo con riferimento monometrico ortogonale siano dati la retta r , passante per il punto $P = (3, 0, 1)$, con vettore direttore $v = (2, -1, 1)$ e la retta s , di equazioni cartesiane $z = -y = -x$.

- (a) Determinare se le rette r e s sono parallele, incidenti o sghembe. Determinare inoltre se sono tra loro ortogonali.
- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo a r e s passante per il punto $(3, 2, 1)$.
- (c) Determinare la distanza del piano π dall'origine degli assi.

4) Dopo aver calcolato la matrice prodotto $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Calcolare gli autovalori di M .
- (b) Per ogni autovalore di M si trovi una base ortonormale del relativo autospazio.
- (c) Si dica se M è diagonalizzabile.