Esame scritto di Geometria e Algebra (Prof. Letizia)
20/6/2006

Svolgere i seguenti esercizi spiegando i procedimenti.

Esercizio 1

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$\{(0,1,1)\,,(2,0,1),\,(2,1,2)\}.$$

Si consideri inoltre il sottospazio $W = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Si trovi una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.

[$V \cap W$ ha dimensione 1 ed ha base $\{(2,-1,0)\}$ mentre per $V + W = \mathbb{R}^3$ si può scegliere la base canonica.]

Esercizio 2

Si discuta e si risolva il seguente sistema lineare al variare di k.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 + kx_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

[Il sistema non ha soluzioni per $k = 10$ ed ha una sola soluzione per $k \neq 10$.]

Esercizio 3

Si calcoli il determinante della seguente matrice e, se esiste, la matrice inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

[Il determinante è 0 e l'inversa non esiste]

Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si calcolino gli autovettori di A, le basi degli autospazi corrispondenti, e si dica se A è diagonalizzabile.

[Gli autovalori sono 2 e 1. L'autospazio di $\lambda = 2$ ha dimensione 2 con base $\{(1,0,2),(0,1,0)\}$ e l'autospzio di $\lambda = 1$ ha base $\{(1,2,1)\}$ perciò A è diagonalizzabile.]

Esercizio 5
Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

[Una possibile base ortonormale è $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$
.]