2 Luglio 2018

Esame scritto di Geometria (lettera P-Z, Prof. Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$V = Span\{(1,1,-1,-1),\ (-1,-3,1,4),\ (2,0,-2,1),\ (5,1,-5,1)\}.$$

Si estragga una base di $V$ dall'insieme dei generatori dati, e si esprimano i generatori rimasti come combinazione lineare dei vettori della base. Sia

$$U = Span\{(-1,-3,-3,2),(1,1,1,0)\}.$$

Si trovino tutti gli eventuali vettori $u, v$ tali che $(2,1,1,0) = u + v$ con $u \in U$ e $v \in V$. Si faccia lo stesso per $(2,1,-1,0) = u + v$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$T(1,1,0) = (1,0,0,-1),\ T(0,1,1) = (0,1,-1,0),\ T(1,0,1) = (-1,-1,1,1).$$

Si spieghi perchè $T$ è ben definita. Si determini la matrice di $T$ rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo e una dell'immagine di $T$. Si dica se $T$ è iniettiva e se essa è suriettiva.

3) Nello spazio euclideo si scrivano un'equazione cartesiana e un'equazione parametrica del piano $\alpha$ passante per i punti $P = (1,2,2), Q = (1,2,1), R = (2,1,2)$. Si calcoli l'area del triangolo $PQR$. Si calcoli l'angolo tra i segmenti $PQ$ e $PR$. Si calcolino le coordinate di tutti i punti $T$ tale che il segmento $PT$ è parallelo alla retta $x = 2y = z$ e la distanza di $T$ da $\alpha$ è 1.

4) Calcolare gli autovalori della matrice

$$M = \begin{pmatrix} \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \pi \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice $M$ è diagonalizzabile. Si calcoli una base ortonormale di ciascun autospazio. Si scriva la matrice della proiezione ortogonale su ciascun autospazio, e la decomposizione spettrale di $M$.

2 Luglio 2018

Esame scritto di Geometria (lettera P-Z, Prof. Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$V = Span\{(1,1,-1,-1),\ (-1,-3,1,4),\ (2,0,2,1),\ (5,5,-1,-5)\}.$$

Si estragga una base di $V$ dall'insieme dei generatori dati, e si esprimano i generatori rimasti come combinazione lineare dei vettori della base. Sia

$$U = Span\{(-1,-3,-3,2),(1,-1,1,0)\}.$$

Si trovino tutti gli eventuali vettori $u, v$ tali che $(2,-1,1,0) = u+v$ con $u \in U$ e $v \in V$. Si faccia lo stesso per $(2,-1,-1,0) = u+v$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T(1,0,0,1) = (1,1,1),\ T(0,1,1,0) = (1,-1,1),$$

$$T(1,0,1,0) = (-1,1,-1),\ T(1,0,-1,0) = (1,1,-1).$$

Si spieghi perchè $T$ è ben definita. Si determini la matrice di $T$ rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo e una dell'immagine di $T$. Si dica se $T$ è iniettiva e se essa è suriettiva.

3) Nello spazio euclideo si scrivano un'equazione cartesiana e un'equazione parametrica del piano $\alpha$ passante per i punti $P = (1,2,2), Q = (1,2,1), R = (2,-1,2)$. Si calcoli l'area del triangolo $PQR$. Si calcoli l'angolo tra i segmenti $PQ$ e $PR$. Si calcolino le coordinate di tutti i punti $T$ tale che il segmento $PT$ è parallelo alla retta $x = y = z$ e la distanza di $T$ da $\alpha$ è 1.

4) Calcolare gli autovalori della matrice

$$M = \begin{pmatrix} e & e & e \\ e & e & e \\ e & e & e \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice $M$ è diagonalizzabile. Si calcoli una base ortonormale di ciascun autospazio. Si scriva la matrice della proiezione ortogonale su ciascun autospazio, e la decomposizione spettrale di $M$.