18 Giugno 2018

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$V = Span\{(1,1,0,-1),(0,2,1,0),(-1,1,1,1)\},$$

e il sottospazio $W$ delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Si determinino la dimensione e una base degli spazi vettoriali $V$, $W$, $W+V$ e $W \cap V$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ definita da

$$T(p(x)) = p''(x) - p'(x) + p(x)(x+1)$$

Si scriva la matrice di $T$ rispetto alle rispettive basi canoniche $\{1, x, x^2\}$ e $\{1, x, x^2, x^3\}$. Si dica se $T$ è iniettiva e se è suriettiva. Si dica se l'equazione $T(p(x)) = x^3$ ha soluzione in $p(x)$ e in caso affermativo si trovino tutte le soluzioni. Si ripeta il procedimento per l'equazione $T(p(x)) = x^2 - 2$.

3) Dato un sistema di riferimento monometrico e ortogonale nello spazio, si consideri la retta $s$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

Determinare un'equazione parametrica della retta $r$ ortogonale a $s$, parallela al piano $\pi$ di equazione $x + y + z = 2$, e passante per l'origine. Si dica se le rette $r$ e $s$ sono parallele, incidenti o sghembe, e si determini la distanza fra esse.

4) Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Si calcolino gli autovalori di $M$ e le rispettive molteplicità geometriche. Si dica se la matrice $M$ è diagonalizzabile. Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) di ciascun autospazio.

18 Giugno 2018

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$V = Span\{(1,1,0,-1),(0,2,1,0),(1,1,1,1)\},$$

e il sottospazio vettoriale $W$ delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Si determinino la dimensione e una base di ciascuno degli spazi vettoriali $V, W, W + V$ e $W \cap V$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definita da

$$T(p(x)) = p''(x) - p'(x) + p'''(x)$$

Si scriva la matrice di $T$ rispetto alle rispettive basi canoniche $\{1, x, x^2, x^3\}$ e $\{1, x, x^2\}$ del dominio e del codominio. Si dica se $T$ è iniettiva e se essa è suriettiva. Si determini la dimensione di $Im(T)$ e di $Ker(T)$. Si dica se l'equazione $T(p(x)) = x^2$ ha soluzione in $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e in caso affermativo si trovino tutte le soluzioni. Si ripeta il procedimento per l'equazione $T(p(x)) = 1$.

3) Dato un sistema di riferimento monometrico e ortogonale nello spazio, si consideri la retta $s$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

Determinare un'equazione parametrica della retta $r$ ortogonale a $s$, parallela al piano $\pi$ di equazione $x - y + z = 2$, e passante per l'origine. Si dica se le rette $r$ e $s$ sono parallele, incidenti o sghembe. Si determini la distanza fra le rette $r$ e $s$.

4) Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcolino gli autovalori di $M$ e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

Si dica se la matrice $M$ è diagonalizzabile. Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) di ciascun autospazio di $M$. Si dica se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $M$, e in caso affermativo la si calcoli.