12 Giugno 2023

Esame scritto di Geometria e Algebra per Informatica

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino nello spazio $R[x]_{\leq 2}$ dei polinomi reali $p(x) = a + bx + cx^2$ di grado minore o uguale a 2 il sottospazio $U = \{p(x) \,|\, p(-1) = 0\}$ e il sottospazio $W = \{p(x) \,|\, p(1) = 0\}$. Trovare dimensioni e basi di U, W, $\mathrm{U} \cap W$ e $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?

2) Si consideri l'applicazione lineare $f : k^4 \to k^3$ definita da $f(X) = AX$ dove $k = Z_2 = \{0, 1\}$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcolino la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine di f.Si dica se $(0, 1, 0, 1)^T$ appartiene al nucleo di f, e se $(1, 1, 1)^T$ appartiene all'immagine di f.

3) Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta r passante per i punti $A = (2, -1, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$ e la retta s definita dall'equazione

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Determinare equazioni parametriche di r e di s. Si determini se le rette r e s sono parallele, incidenti, o sghembe. Si scriva l'equazione cartesiana di un piano π passante per i punti A, B e $C = (0, 1, 0)$. Si calcoli l'area del triangolo ABC.

4) Si trovino gli autovalori reali della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e una base di ciascun autospazio. Si dica se la matrice M è diagonalizzabile sui reali.

12 Giugno 2023

Esame scritto di Geometria e Algebra per Informatica

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino nello spazio $R[x]_{\leq 2}$ dei polinomi reali $p(x) = a + bx + cx^2$ di grado minore o uguale a 2 il sottospazio $U = \{p(x) \,|\, p'(1) = 0\}$ e il sottospazio $W = \{p(x) \,|\, p(1) = p''(1) = 0\}$. Trovare dimensioni e basi di U, W, $U \cap W$ e $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?

2) Si consideri l'applicazione lineare $f : k^3 \to k^4$ definita da $f(X) = AX$ dove $k = Z_2 = \{0, 1\}$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcolino la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine di f.Si dica se $(0, 1, 0)^T$ appartiene al nucleo di f, e se $(0, 1, 0, 0)^T$ appartiene all'immagine di f.

3) Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta r passante per i punti $A = (1, 0, 3)$ e $B = (1, -1, 1)$ e la retta s definita dall'equazione

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Determinare equazioni parametriche di r e di s. Si determini se le rette r e s sono parallele, incidenti, o sghembe. Si scriva l'equazione cartesiana di un piano π passante per i punti A, B e $C = (1, 0, 0)$. Si calcoli l'area del triangolo ABC.

4) Si trovino gli autovalori reali della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e una base di ciascun autospazio. Si dica se la matrice M è diagonalizzabile sui reali.