Soluzioni 12-06-23

1) I sottospazi U e W sono dati da:

$$U = \{p(x)|\ p(-1) = 0\} = \{a - b + c = 0\} = Span\{1 + x, -1 + x^2\}$$
$$W = \{p(x)|\ p(1) = 0\} = \{a + b + c = 0\} = Span\{-1 + x, -1 + x^2\}$$

I vettori che generano U e W sono linearmente indipendenti, quindi sono basi per essi e di conseguenza $dimU = 2$ e $dimW = 2$.

$$U + W = Span\{1 + x, -1 + x^2, -1 + x, -1 + x^2\} = Span\{1 + x, -1 + x^2, -1 + x\}$$

I vettori che generano $U + W$ non sono tutti linearmente indipendenti, quindi una base per la somma è data dai 3 vettori all'estrema destra dell'espressione sopra, e perciò $dim(U + W) = 3$. Allora

$$dim(U \cap W) = dimU + dimW - dim(U + W) = 1$$

da cui deduciamo che $U \cap W \neq \emptyset$, e perciò la somma non è diretta.

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{a(1 + x) + b(-1 + x^2) = c(-1 + x) + d(-1 + x^2)\} \\ &= \{A(e_1 + e_2) + B(-e_1 + e_3) = C(-e_1 + e_2) + D(-e_1 + e_3)\} \\ &= \{\begin{cases} A - B + C + D = 0 \\ A - C = 0 \\ B - D = 0 \end{cases}\} \end{aligned}$$

Le cui soluzioni sono $(a, b, c, d) = (0, t, 0, t)$, da cui $U \cap W = Span\{-1 + x^2\}$ (Come ci potevamo aspettare osservando lo gli span di U e W).

2) L'esercizio si svolge tutto su spazi vettoriali numerici su $k = \mathbb{Z}_2$. La terza colonna della matrice A è la somma in delle prima due, che sono linearmente indipendenti, la quarta colonna è uguale alla seconda, quindi le prime due colonne formano una base per l'immagine. Perciò

$$Im(f) = Span\{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\} \Rightarrow dim(Im(f)) = 2$$

Quindi deduciamo che

$$dim(ker(f)) = dim(k^4) - dim(Im(f)) = 2$$

Il nucleo di f sono i vettori in $X \in k^4$ tali che $AX = 0$, quindi le soluzioni di un sistema equivalente $A'X = 0$ dove A' è la riduzione della matrice A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $ker(f) = Span\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Di conseguenza $(0, 1, 0, 1)^T \in ker(f)$. Inoltre $(1, 1, 1)^T \notin Im(f) = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) = (0, 1, 1) + (1, 0, 1)\}$.

3) Delle equazioni parametriche per r ed s sono:

$$r : A + t(B - A) = \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 2 - 2s \end{cases}$$

Dei vettori direttori di r ed s sono rispettivamente $(-1, 2, 1)$ e $(1, 1, -2)$, che sono linearmente indipendenti, perciò le rette non sono ne parallele ne coincidenti. Inoltre il sistema

$$\begin{cases} 2 - t = s \\ -1 + 2t = s \\ t = 2 - 2s \end{cases}$$

non ammette soluzioni quindi sono sghembe.

L'equazione parametrica di un piano passante per i tre punti A, B, C è data da:

$$\pi : A + k(B - A) + h(C - A) = \begin{cases} x = 2 - k - 2h \\ y = -1 + 2k + 2h \\ z = k \end{cases}$$

da cui deduciamo che l'equazione del piano certato è $\pi : x + y - z - 1 = 0$.

L'area del triangolo ABC è data da

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}||(B - A) \times (C - A)|| = \frac{1}{2}||(-2, -2, 2)|| = \sqrt{3}$$

4) Il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Perciò gli autovalori reali sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

$$V_1 = \{(M - I)X = 0\} = Span\{(1, 1, 1, 1)\}$$

$$V_{-1} = \{(M + I)X = 0\} = Span\{(-1, -1, 1, 1)\}$$

Osserviamo che la somma delle molteplicità algebriche non è 4 perciò M non è diagonalizzabilità sui reali .

1) I sottospazi U e W sono dati da:

$$U = \{p(x) |\ p'(1) = 0\} = \{2c + b = 0\} = Span\{1, -2x + x^2\}$$
$$W = \{p(x) |\ p(1) = p''(1) = 0\} = \{\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}\} = Span\{1 - x\}$$

I vettori che generano U e W sono linearmente indipendenti, quindi sono basi per essi e di conseguenza $dimU = 2$ e $dimW = 1$.

$$U + W = Span\{1, -2x + x^2, 1 - x\}$$

I vettori che generano $U + W$ sono linearmente indipendenti, quindi una base per la somma, e perciò $dim(U + W) = 3$. Allora

$$dim(U \cap W) = dimU + dimW - dim(U + W) = 0$$

da cui deduciamo che $U \cap W = \{0\}$, e perciò la somma è diretta.

2) L'esercizio si svolge tutto su spazi vettoriali numerici su $k = \mathbb{Z}_2$. La terza colonna della matrice A è la somma in delle prima due, che sono linearmente indipendenti e quindi una base per l'immagine. Perciò

$$Im(f) = Span\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\} \Rightarrow dim(Im(f)) = 2$$

Quindi deduciamo che

$$dim(ker(f)) = dim(k^3) - dim(Im(f)) = 1$$

Il nucleo di f sono i vettori in $X \in k^3$ tali che $AX = 0$, quindi le soluzioni di un sistema equivalente $A'X = 0$ dove A' è la riduzione della matrice A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $ker(f) = Span\{(1, 1, 1)\}$. Di conseguenza $(0, 1, 0)^T \notin ker(f) = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Inoltre $(0, 1, 0, 0)^T \notin Im(f) = \{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1) = (0, 1, 1, 1) + (1, 0, 1, 0)\}$.

3) Delle equazioni parametriche per r ed s sono:

$$r : A + t(B - A) = \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 - s \\ y = s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$$

Dei vettori direttori di r ed s sono rispettivamente $(0, -1, -2)$ e $(-1, 1, 2)$, che sono linearmente indipendenti, perciò le rette non sono ne parallele ne coincidenti. Inoltre il sistema

$$\begin{cases} 1 = -1 - s \\ -t = s \\ 3 - 2t = 3 + 2s \end{cases}$$

ammette soluzione $(t, s) = (2, -2)$, quindi sono incidenti.

L'equazione parametrica di un piano passante per i tre punti A, B, C è data da:

$$\pi : A + k(B - A) + h(C - A) = \begin{cases} x = 1 \\ y = -k \\ z = 3 - 2k - 3h \end{cases}$$

da cui deduciamo che l'equazione del piano certato è $\pi : x = 1$.

L'area del triangolo ABC è data da

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}||(B-A) \times (C-A)|| = \frac{1}{2}||(3,0,0)|| = \frac{3}{2}$$

4) La matrice M è simmetrica, perciò diagonalizzabile. Il suo polinomio caratteristico è

$$p_M(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$

Perciò gli autovalori reali sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

$$V_1 = \{(M-I)X = 0\} = Span\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$$

$$V_{-1} = \{(M+I)X = 0\} = Span\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$$

Osserviamo che la somma delle molteplicità algebriche è 4 e che

$$m_a(1) = 2 = m_g(1)$$

$$m_a(-1) = 2 = m_g(-1)$$

quindi confermiamo la diagonalizzabilità sui reali della matrice M.