

11 Febbraio 2019

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 1, 0)$. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si determini la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$
- (b) Si determini la dimensione e una base della somma $U + V$.
- (c) Si scriva, se possibile, il vettore $w = (-1, 0, 0, 1)$ come $w = u + v$ con $u \in U$ e $v \in V$.

2) Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 - x_4, 2x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3)$$

- (a) Determinare la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Determinare dimensioni e basi di $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.
- (c) Si dica se f è iniettiva e se è suriettiva.
- (d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = (1, 1, 1)$.

3) Nello spazio euclideo con riferimento monometrico ortogonale siano dati la retta r , passante per il punto $P = (2, 1, -3)$, con vettore direttore $v = (-1, 1, 1)$ e la retta s , di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare se le rette r e s sono parallele, incidenti o sghembe.
- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo a r e s e passante per l'origine degli assi.
- (c) Calcolare l'angolo tra le rette r e s .

4) Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- (a) Si calcolino gli autovalori reali di M .
- (b) Si trovi una base di ciascun autospazio di M .
- (c) Si determini se M è diagonalizzabile.