

**GEOMETRIA**  
**PROVA SCRITTA DEL 10/02/2010**

Si svolgono tre esercizi a piacere tra i seguenti.

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z, x + 3y).$$

- Si trovi una base del nucleo di  $f$  e una dell'immagine di  $f$ . Si dica se  $f$  è iniettiva e se è suriettiva.
- Si trovino, se esistono, tutti i vettori  $w$  tali che  $f(w) = (0, 0, 1)$  e tutti i vettori  $v$  tali che  $f(v) = (0, 2, -1)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $V$  l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti reali nelle variabili  $x, y$ , di grado minore o uguale a tre. Si verifichi che  $V$  è uno spazio vettoriale reale e se ne calcoli la dimensione. Si verifichi che l'applicazione

$$A : V \rightarrow V \quad \text{definita da} \quad A(f(x, y)) = f(x, 0) - f(0, y)$$

è lineare e se ne calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine.

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1)  $A$  è diagonalizzabile come matrice reale?
- (2)  $A$  è diagonalizzabile come matrice complessa?
- (3) L'endomorfismo  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definito da  $A$  è ciclico?

**Esercizio 4.** Sia  $S_4$  il gruppo delle permutazioni di  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Utilizzando la decomposizione ciclica, si determini il numero delle permutazioni  $s \in S_4$  per cui

$$s(j) \neq j \quad \text{per} \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Si trovi inoltre quante di queste abbiano segnatura positiva e quante segnatura negativa.