

GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DEL 10/02/2010

Si svolgano tre esercizi a piacere tra i seguenti.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z, x + 3y).$$

- Si trovi una base del nucleo di f e una dell'immagine di f . Si dica se f è iniettiva e se è suriettiva.
- Si trovino, se esistono, tutti i vettori w tali che $f(w) = (0, 0, 1)$ e tutti i vettori v tali che $f(v) = (0, 2, -1)$.

Esercizio 2. Sia V l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti reali nelle variabili x, y , di grado minore o uguale a tre. Si verifichi che V è uno spazio vettoriale reale e se ne calcoli la dimensione. Si verifichi che l'applicazione

$$A : V \rightarrow V \quad \text{definita da} \quad A(f(x, y)) = f(x, 0) - f(0, y)$$

è lineare e se ne calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) A è diagonalizzabile come matrice reale?
- (2) A è diagonalizzabile come matrice complessa?
- (3) L'endomorfismo $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito da A è ciclico?

Esercizio 4. Sia \mathbf{S}_4 il gruppo delle permutazioni di $\{1, 2, 3, 4\}$. Utilizzando la decomposizione ciclica, si determini il numero delle permutazioni $s \in \mathbf{S}_4$ per cui

$$s(j) \neq j \quad \text{per} \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Si trovi inoltre quante di queste abbiano segnatura positiva e quante segnatura negativa.