10 Settembre 2018

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino nello spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2 x 2

$V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale

$$U = \{X \in V \mid (1\ 2) \cdot X = (0\ 0)\}$$

e il sottospazio vettoriale

$$W = \{X \in V \mid X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Si determini una base di U e una di W. Quindi si trovi la dimensione e una base di $U \cap W$ e $U + W$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$ definita da

$$T(x, y, z) = (kx + ky + (k + 1)z\, ,\ kx + (k + 1)z\, ,\ -kx + ky + (k + 1)z)$$

Si scriva la matrice di T rispetto alla base canonica. Si caratterizzi la dimensione del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro k. Si dica per quali valori di k T è iniettiva e per quali valori di k T è suriettiva.

3) Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta r di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

Determinare un vettore direttore di r. Sia s la retta di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Si determini se le rette r e s sono parallele, incidenti, o sghembe. Si determini l'angolo tra di esse. Determinare un'equazione parametrica di una retta l ortogonale a r e s, che intersechi sia r che s.

4) Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

al variare del parametro k si determinino gli autovalori di M. Si dica per quali valori di k la matrice M è diagonalizzabile e per tali k si trovi una base di autovettori. Si dica per quali valori di k esiste una base ortonormale di autovettori.

10 Settembre 2018

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino nello spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2 x 2

$V = M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale $U = \{X \in V \mid (1 \ \ -1) \cdot X = (0 \ 0)\}$ e il sottospazio vettoriale $W = \{X \in V \mid X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Si determini una base di U e una di W. Quindi si trovi la dimensione e una base di $U \cap W$ e $U + W$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$ definita da

$$T(x, y, z) = ((k-1)x + (k-1)y + kz \, , \, (k-1)x + kz \, , \, -(k-1)x + (k-1)y + kz)$$

Si scriva la matrice di T rispetto alla base canonica. Si caratterizzi la dimensione del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro k. Si dica per quali valori di k T è iniettiva e per quali valori di k T è suriettiva.

3) Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri la retta r di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

Determinare un vettore direttore di r. Sia s la retta di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Si determini se le rette r e s sono parallele, incidenti, o sghembe. Si determini l'angolo tra di esse. Determinare un'equazione parametrica di una retta l ortogonale a r e s, che intersechi sia r che s.

4) Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

al variare del parametro k si determinino gli autovalori di M. Si dica per quali valori di k la matrice M è diagonalizzabile e per tali k si trovi una base di autovettori. Si dica per quali valori di k esiste una base ortonormale di autovettori.