

Analisi Matematica I
Calcolo differenziale e applicazioni

d:Derivabil

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili in $x_0 = 0$.

- (1) $f(x) = x|x|$
- (2) $f(x) = |x| \sin x$
- (3) $f(x) = |x| \cos x$
- (4) $f(x) = |x \sin x|$
- (5) $f(x) = x \sin \sqrt[3]{x}$
- (6) $f(x) = (e^x - 1) \sin \sqrt[3]{x}$
- (7) $f(x) = |e^x - 1| \sin \sqrt[3]{x}$
- (8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+|x|)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- (9) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+x^2)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- (10) $f(x) = |\log(1+x)|^{1/2} |x|^{3/4}$
- (11) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- (12) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- (13) $f(x) = \sqrt{|x|}$
- (14) $f(x) = x\sqrt{|x|}$
- (15) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 |x|}{\sqrt[3]{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- (16) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- (17) $f(x) = \sqrt{|\sin^3 x|}$
- (18) $f(x) = \begin{cases} \frac{|1-e^x|}{\sqrt[5]{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- (19) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|1-e^x|}}{\sqrt[5]{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

d:RettaTang

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 .

- (1) $f(x) = x^{1/x}, \quad x_0 = 1$
- (2) $f(x) = \log \log x, \quad x_0 = e$
- (3) $f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x}, \quad x_0 = e$
- (4) $f(x) = \sin(e^{2x^2+1}), \quad x_0 = 1$
- (5) $f(x) = \arcsin(\log x + 1), \quad x_0 = \frac{1}{e}$
- (6) $f(x) = \log \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x \right) \right), \quad x_0 = \frac{1}{2}$

Weierstrass

Esercizio 3. Determinare estremo superiore/inferiore di f nell'insieme A indicato.

- (1) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \quad A = [-2, 3]$
- (2) $f(x) = |x|^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \quad A = [-2, 3]$
- (3) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}, \quad A = [-1, 2]$
- (4) $f(x) = x|x|, \quad A = [-2, 1]$
- (5) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}, \quad A = [-2, 3]$
- (6) $f(x) = \frac{x^2 - 3|x + 1| + 1}{x^2 + 4}, \quad A = [-2, 2]$

Derivando

Esercizio 4. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescita/decrecenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

- (1) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$
- (2) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x^2 - 1}$
- (3) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$
- (4) $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$
- (5) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x + 1}$
- (6) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$
- (7) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{|3 - x^2|} - 2}$
- (8) $f(x) = x^2 \left(\log\left(\frac{x}{4}\right) - 1 \right)^2$

- (9) $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x+2}$
 (10) $f(x) = (x^2 + 12x)e^{-2/x}$
 (11) $f(x) = xe^{\frac{x}{1+x}}$
 (12) $f(x) = |x|e^{\frac{x}{1+x}}$
 (13) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
 (14) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2-x}\right)$
 (15) $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$
 (16) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$
 (17) $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$
 (18) $f(x) = \sqrt{\cos\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

Esercizio 5.

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescita/decrecenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. Determinare eventuali punti di flesso, e intervalli di concavità/convessità.

- (1) $f(x) = (x^2 + x)e^{x+1}$
 (2) $f(x) = (x^2 + x)e^{-(x+1)}$
 (3) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$
 (4) $f(x) = e^{\frac{x}{|1+x|}}$
 (5) $f(x) = x - \log(x^2 + x + 1)$
 (6) $f(x) = |x| - \log(x^2 + x + 1)$
 (7) $f(x) = \frac{4|x^2 + x| - 1}{x^2}$
 (8) $f(x) = \frac{|x^2 - 1| - 1}{(x-1)^2}$
 (9) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - x^2)$
 (10) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - x^2) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|1 - x^2|}\right)$
 (11) $f(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x + 1}$

Esercizio 6. Determinare se le seguenti funzioni sono iniettive. In caso affermativo, determinare il valore della derivata prima della funzione inversa nel punto (x_0, y_0) specificato.

- (1) $f(x) = e^{x^3} + 2e^{\arctg(3x)} - 1, \quad (0, 2)$
- (2) $f(x) = \log(x^3 + x^2 + e), x > 0, \quad (1, \log(2 + e))$
- (3) $f(x) = \sqrt[5]{1 - x - \cos x}, \quad (0, 0)$
- (4) $f(x) = e^{2x} - 2x^2, \quad (0, 1)$
(Suggerimento: tracciare il grafico di f' .)
- (5) $f(x) = \frac{x^2}{2} - e^x + 1, \quad (0, 0)$
(Suggerimento: tracciare il grafico di f' .)

Esercizio 7. Calcolare i seguenti limiti.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^3 \sin x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x^2) - e^{-x^4}}{x^5(\arcsin x)^3}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\arcsin x - x)}{\sin^3 x - x^3}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \log(1 + x^2)}{x^2 - x \arcsin x}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^3) - \sin^3 x}{x^2 \arctg(x^3)}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x \log(1 + x)}{\operatorname{tg}^2 x \log(1 + x)}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - (\log(1 + x))^2 - x^3}{x^2 \arctg(x^2)}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x) - 6x e^{-6x^2}}{x^3(\arctg x)^2}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x) - x}{\sqrt{\cos x} - 1}$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(\log(1 + x^2)) - x^2}{x^4}$
- (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - \log(\cos x)}{x \sin x}$
- (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x - \log(\cos x)) \log(1 + \sin x)}{\sin^2 x \sin(2x)}$
- (14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x - x}$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 2x + (x^2 + x) \log \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \cos \frac{2}{x} - x \log \left(1 + \frac{2}{x^3} \right) + \frac{3}{x^5} \right)$$

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 4e^{\sqrt{x}} + 3e^{\sqrt[3]{x}}}{\log x - x + 1}$$

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\pi - x)^2 - 8 + 8 \sin(x/2)}{4 \cos^2(x/2) - (\pi - x)^2}$$

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \frac{1}{n})(\sin \frac{1}{n} + e^{-n})}{e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos \frac{1}{n}}$$

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{2}{n})^{n^2} + n^{\sqrt{n}}}{e^{2n} - 3^n \operatorname{arctg} n}$$

Analisi Matematica I
Calcolo differenziale e applicazioni (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

- (1) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (2) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (3) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}(1 + o(1)) = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.
- (4) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x \sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (5) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (6) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (7) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|e^x - 1| \sin \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \sin \sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (8) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \log(1 + |x|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|(1 + o(1))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} |x|(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (9) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \log(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1 + o(1))} = 1$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (10) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\log(1 + x)|^{1/2} |x|^{3/4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{5/4}(1 + o(1))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} |x|^{1/4}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (11) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.
- (12) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (13) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.
- (14) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (15) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 |x|}{x \sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2(1 + o(1))}{x^{7/3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(1 + o(1)) = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.
- (16) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (17) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{3/2}(1 + o(1))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (18) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - e^x|}{x \sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(1 + o(1))}{x \sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \frac{1}{\sqrt[5]{|x|}}(1 + o(1)) = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.
- (19) Si ha $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|1 - e^x|}}{x \sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|(1 + o(1))}}{x \sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \frac{1}{|x|^{7/10}}(1 + o(1)) = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

□

Svolgimento esercizio 2

- (1) Si ha $f(x) = e^{\frac{1}{x} \log x}$, per cui $f'(x) = e^{\frac{1}{x} \log x} \frac{1 - \log x}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, e quindi la retta tangente è $y = 1 + (x - 1) = x$.
- (2) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x \log x}$, $f(e) = 0$, $f'(e) = \frac{1}{e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e} - 1$.
- (3) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x(1 + \log x)^2}$, $f(e) = \frac{1}{2}$, $f'(e) = \frac{1}{4e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4e}(x - e) = \frac{x}{4e} + \frac{1}{4}$.
- (4) Si ha $f'(x) = 4xe^{2x^2+1} \cos(e^{2x^2+1})$, $f(1) = \sin(e^3)$, $f'(1) = 4e^3 \cos(e^3)$, e quindi la retta tangente è $y = \sin(e^3) + 4e^3 \cos(e^3)(x - 1)$.
- (5) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - (\log x + 1)^2}}$, $f(\frac{1}{e}) = 0$, $f'(\frac{1}{e}) = e$, e quindi la retta tangente è $y = e(x - \frac{1}{e}) = ex - 1$.
- (6) Si ha $f'(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \arcsin x)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \arcsin x)\sqrt{1 - x^2}}$, $f(\frac{1}{2}) = \log \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$, e quindi la retta tangente è $y = \log \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}(x - \frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} + \log \frac{\sqrt{3}}{2}$.

□

Svolgimento esercizio 3

- (1) Si ha $f'(x) = 3(x^2 + x - 2)$ e $f'(x) = 0 \iff x = -2 \notin A^o \vee x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 1\}$. Si ha $f(-2) = 11$, $f(3) = \frac{47}{2} = \max_A f$, $f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.
- (2) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 3(x^2 + x - 2), & 0 < x < 3, \\ -3(x^2 - x + 2), & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 0, 1\}$. Si ha $f(-2) = 27 = \max_A f$, $f(3) = \frac{47}{2}$, $f(0) = 1$, $f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.
- (3) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 0 < x < 2, \\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & -1 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-1, 2, 0\}$. Si ha $f(-1) = 1$, $f(2) = \sqrt[3]{2} = \max_A f$, $f(0) = 0 = \min_A f$.
- (4) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ -2x, & -2 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 1, 0\}$. Si ha $f(-2) = -4 = \min_A f$, $f(1) = 1 = \max_A f$, $f(0) = 0$.
- (5) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1 + \sqrt{2} \in A^o \vee x = -1 - \sqrt{2} \notin A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 0, 1 + \sqrt{2}\}$. Si ha $f(-2) = \frac{6}{5}$, $f(3) = \frac{6}{5}$, $f(0) = 0 = \min_A f$, $f(1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = \max_A f$.
- (6) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2 + 4x - 4)}{(x^2 + 4)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{-6(x^2 - 2)}{(x^2 + 4)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{8} - 2 \in A^o \vee x = -\sqrt{2} \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 2, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{8} - 2\}$. Si ha $f(-2) = \frac{1}{4}$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(-1) = \frac{2}{5} = \max_A f$, $f(-\sqrt{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\sqrt{8} - 2) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \min_A f$.

□

Svolgimento esercizio 4

- (1) Sia $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 2 + o(1)$, per cui $y = 2$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \iff x \geq 0$.

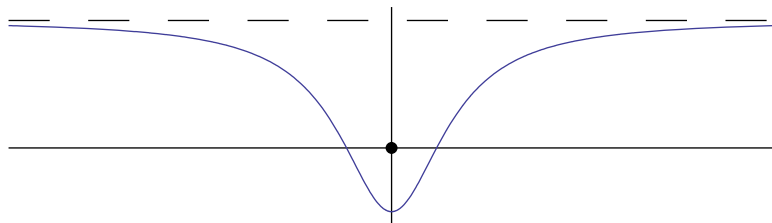


Figura 1: Grafico per l'esercizio 4 (1)

fig:Derivat

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(0) = -1$.

Il grafico è riportato in figura 1.

- (2) Sia $f(x) = \frac{x^2+2x}{2x^2-1}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{2x^2(1+o(1))} = \frac{1}{2}(1+o(1))$, per cui $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$. Per $x \rightarrow (-\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+o(1)}{(-2+o(1))(\sqrt{2}x+1)} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}x+1} (1+o(1)) \rightarrow \pm\infty$. Per $x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}+o(1)}{(2+o(1))(\sqrt{2}x-1)} = \frac{2\sqrt{2}+1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}x-1} (1+o(1)) \rightarrow \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{(2x+2)(2x^2-1)-4x(x^2+2x)}{(2x^2-1)^2} = \frac{-2(2x^2+x+1)}{(2x^2-1)^2} \leq 0 \iff x \in \text{dom } f$.

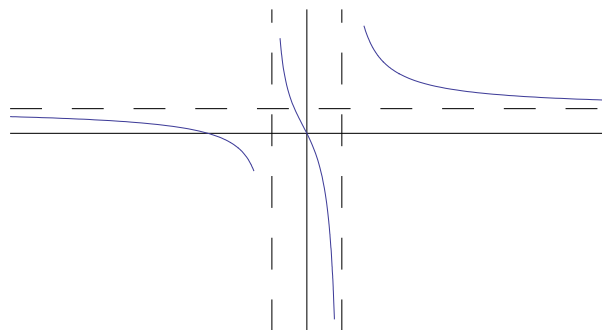


Figura 2: Grafico per l'esercizio 4 (2)

fig:Derivat

Il grafico è riportato in figura 2.

- (3) Sia $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 1 + o(1)$, per cui $y = 1$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, & x > 0, \\ \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}, & x < 0, \end{cases}$ per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup (0, 1+\sqrt{2}]$. Si ha poi $f'_\pm(0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \pm 1$.

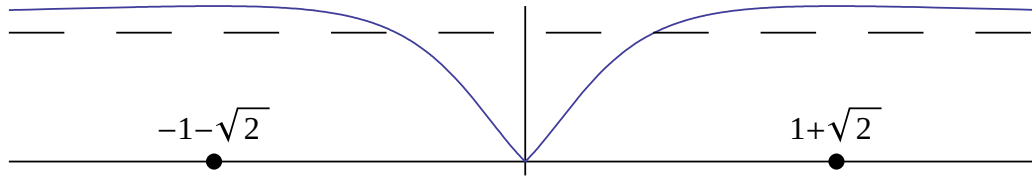


Figura 3: Grafico per l'esercizio 4 (3)

fig:Derivat

Allora, $x = \pm(1 + \sqrt{2})$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di minimo relativo ed è angoloso. Si ha $f(0) = 0$, $f(\pm(1 + \sqrt{2})) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Il grafico è riportato in figura 3.

(4) Sia $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha, per $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) = x^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre, $f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} \geq 0 \iff x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$. Si ha anche $f'_\pm(0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} = \mp\infty$.

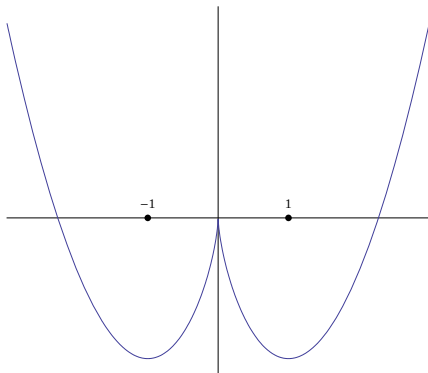


Figura 4: Grafico per l'esercizio 4 (4)

fig:Derivat

Allora, $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo e di cuspid. Si ha $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = -2$.

Il grafico è riportato in figura 4.

(5) Sia $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1} = \frac{1}{x^{2/3}(1+o(1))} = o(1)$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$. Per $x \rightarrow (-1)^\pm$, si ha $f(x) = -\frac{1}{x+1}(1 + o(1)) \rightarrow \mp\infty$, per cui $x = -1$ è asintoto verticale di f .

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, si ha $f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+1) - \sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-2x}{3x^{2/3}(x+1)^2} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2}]$. Si ha poi $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^{2/3}} 1 + o(1) = +\infty$.

Allora, $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

Il grafico è riportato in figura 5.

(6) Sia $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha

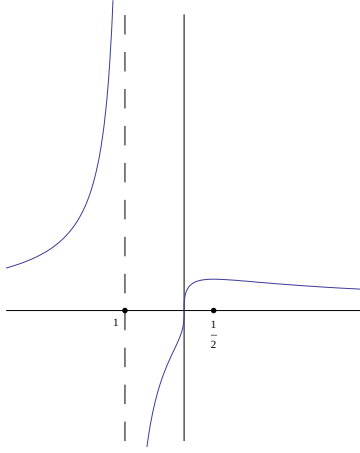


Figura 5: Grafico per l'esercizio 4 (5)

fig:Derivat

$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) = x - 1 + o(1)$, per cui $y = x - 1$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, si ha $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x^3 - 3x^2)^{2/3}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$. Si ha poi $f'_\pm(0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{-2x(1+o(1))}{(-3x^2)^{2/3}(1+o(1))} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2}{\sqrt[3]{9x}(1+o(1))} = \pm\infty$, cioè $x = 0$ è un punto di cuspidè, e $f'_\pm(3) = \lim_{x \rightarrow 3^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{3+o(1)}{9^{4/3}(x-3)^{2/3}(1+o(1))} = +\infty$, cioè $x = 3$ è un punto di flesso a tangente verticale.

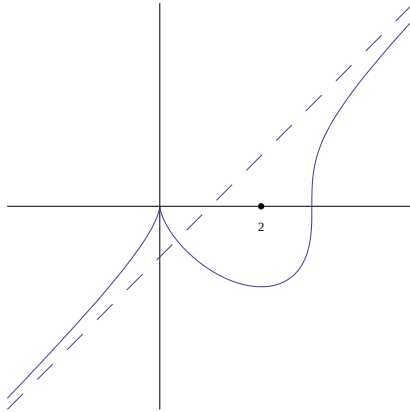


Figura 6: Grafico per l'esercizio 4 (6)

fig:Derivat

Allora, $x = 2$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(0) = f(3) = 0$, e $f(2) = -\sqrt[3]{4}$.

Il grafico è riportato in figura 6.

(7) Sia $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{|3-x^2|}} - 2$. Si ha $\text{dom } f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -\sqrt{\sqrt{7}-1}] \cup [\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, f è continua, e pari. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 6}{x^2 - 3}} = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^2 + x^2 + 6}{x^2 - 3}} =$

$\sqrt{x^2 + \frac{x^2+6}{x^2-3}} = x\sqrt{1 + \frac{x^2+6}{x^2(x^2-3)}} = x(1 + \frac{x^2+6}{2x^2(x^2-3)}) = x + o(1)$, per cui $y = x$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow +\infty$, e, di conseguenza, $y = -x$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow -\infty$. Per $x \rightarrow \sqrt{3}$, si ha $f(x) = \sqrt{\frac{9}{2\sqrt{3}|x-\sqrt{3}|}}(1 + o(1)) \rightarrow +\infty$, per cui $x = \sqrt{3}$ è asintoto verticale di f .

Inoltre, per ogni $x \in \text{dom } f \cap (0, +\infty)$, si ha $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^4+2x^2-6}{3-x^2}}, & x \in [\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}), \\ \sqrt{\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3}}, & x \in (\sqrt{3}, +\infty), \end{cases}$ per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^3(6-x^2)}{(3-x^2)^{3/2}\sqrt{x^4+2x^2-6}}, & x \in (\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}), \\ \frac{x^3(x^2-6)}{(x^2-3)^{3/2}\sqrt{x^4-2x^2+6}}, & x \in (\sqrt{3}, +\infty), \end{cases} \text{ per cui } f'(x) \geq 0 \iff x \in (\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}) \cup$$

$(\sqrt{6}, +\infty)$. Si ha poi $f'_+(\sqrt{\sqrt{7}-1}) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{\sqrt{7}-1})^+} f'(x) = +\infty$.

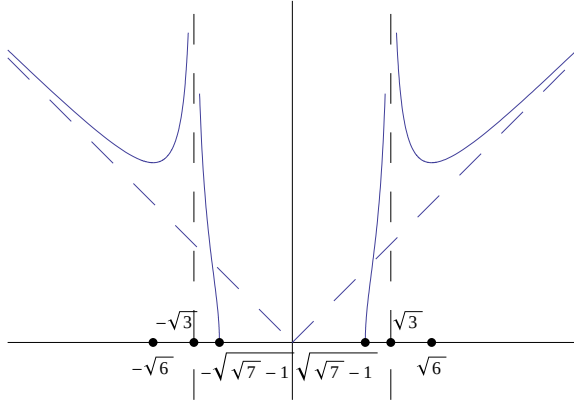


Figura 7: Grafico per l'esercizio 4 (7)

fig:Derivat

Allora, $x = \pm\sqrt{\sqrt{7}-1}$ e $x = \pm\sqrt{6}$ sono punti di minimo relativo. Si ha $f(\pm\sqrt{\sqrt{7}-1}) = 0$, $f(\pm\sqrt{6}) = \sqrt{10}$.

Il grafico è riportato in figura 7.

(8) Sia $f(x) = x^2(\log \frac{x}{4} - 1)^2$. Si ha $\text{dom } f = (0, +\infty)$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha $f(x) = x^2(\log x)^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = x^2(\log x)^2(1 + o(1)) \rightarrow 0$.

Inoltre, per ogni $x \in (0, +\infty)$, si ha $f'(x) = 2x(\log \frac{x}{4} - 1)^2 + x^2 \cdot 2(\log \frac{x}{4} - 1) \frac{1}{x} = 2x \log \frac{x}{4} (\log \frac{x}{4} - 1) \geq 0 \iff x \in (0, 4) \cup (4e, +\infty)$. Si ha poi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x(\log x)^2(1 + o(1)) = 0$.

Allora, $x = 4$ è un punto di massimo relativo, mentre $4e$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(4) = 16$, $f(4e) = 0$.

Il grafico è riportato in figura 8.

(9) Sia $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x+2}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = 0,$$

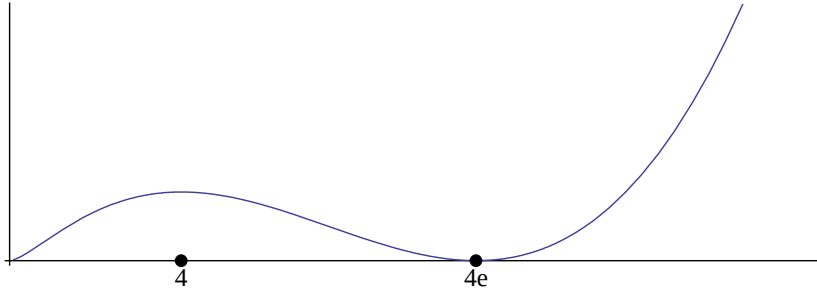


Figura 8: Grafico per l'esercizio 4 (8)

fig:Derivat

per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x(x+2)-1}{(x+2)^2}e^{-x^2} = -\frac{2x^2+4x+1}{(x+2)^2}e^{-x^2} \geq 0 \iff x \in [-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

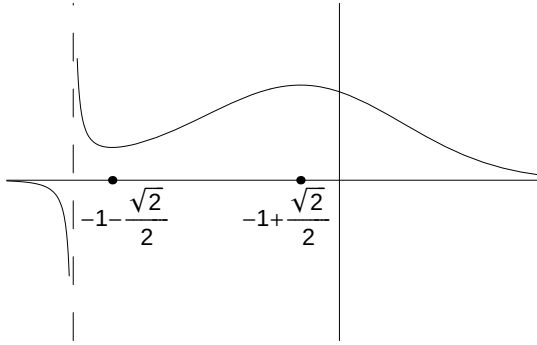


Figura 9: Grafico per l'esercizio 4 (9)

fig:Derivat

Allora, $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo relativo.

Il grafico è riportato in figura 9.

(10) Sia $f(x) = (x^2 + 12x)e^{-2/x}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha $f(x) = x^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \rightarrow \pm\infty$. Per $x \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \rightarrow 0$, mentre per $x \rightarrow 0^-$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \rightarrow +\infty$, per cui $x = 0$ è asintoto verticale di f .

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha $f'(x) = (2x+12)e^{-2/x} + (x^2+12x) \cdot \frac{2}{x^2}e^{-2/x} = \frac{2e^{-2/x}}{x}(x^2+7x+12) \geq$

$0 \iff x \in (-4, -3) \cup (0, +\infty)$. Si ha poi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \stackrel{(z=1/x)}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{24z}{e^{2z}}(1 + o(1)) = 0$.

Allora, $x = -4$ è un punto di minimo relativo, mentre -3 è un punto di massimo relativo. Si ha $f(-4) = -32\sqrt{e}$, $f(-3) = -27e^{2/3}$.

Il grafico è riportato in figura 10.

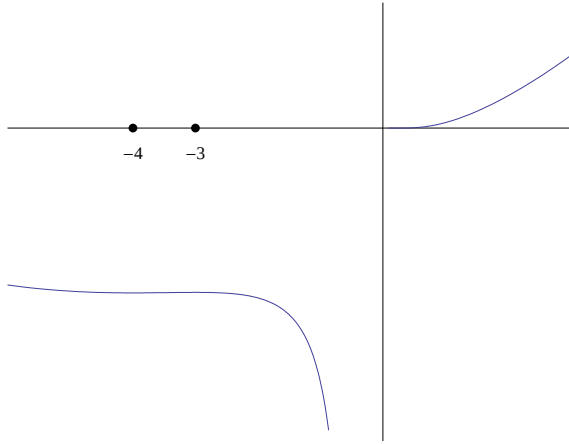


Figura 10: Grafico per l'esercizio 4 (10)

fig:Derivat

(11) Sia $f(x) = xe^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} &= \pm\infty \\ m_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{x}{x+1}}}{x} = e \\ q_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} - ex = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ex \left(e^{\frac{x}{x+1}-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ex \frac{-(1+o(1))}{x+1} = -e \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} xe^{\frac{x}{x+1}} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} xe^{\frac{x}{x+1}} &= -\infty, \end{aligned}$$

per cui f ha asintoto obliquo $y = ex - e$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre, $f'(x) = \left(1 + x \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\right) e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

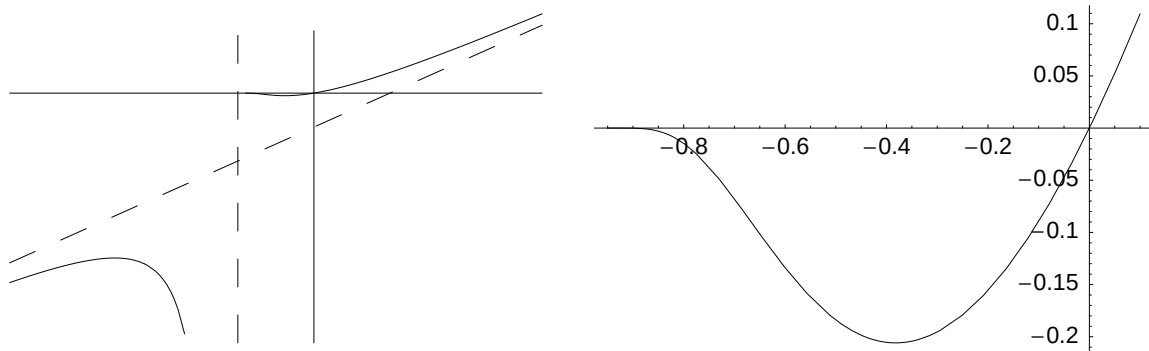


Figura 11: Grafico per l'esercizio 4 (11)

fig:Derivat

Quindi, f è crescente in $(-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ e in $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ e decrescente in $(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1)$ e in $(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$.

Inoltre $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$, e $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}}$. Inoltre, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f'(x) = 0$. Il grafico è riportato in figura 11, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(12) Sia $f(x) = |x|e^{\frac{x}{x+1}}$. Poiché $|x|e^{\frac{x}{x+1}} = |xe^{\frac{x}{x+1}}|$, il grafico di f si ottiene da quello dell'esercizio 4 (11).

Osserviamo che l'asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow -\infty$ ha equazione $y = -e(x-1)$. Infatti

$$m_- := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|e^{\frac{x}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{1+o(1)} = -e$$

$$q_- := \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|e^{\frac{x}{x+1}} + ex = \lim_{x \rightarrow -\infty} ex \left(-e^{\frac{x}{x+1}-1} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -ex \frac{-(1+o(1))}{x+1} = e.$$

(13) Sia $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{x-1}$. Allora $\text{dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \right\} = (-\infty, 0]$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} \geq 0 \\ \frac{2}{x-1} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 < 0 \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Per $x \rightarrow -\infty$, si ha $f(x) = \arcsin(1+o(1)) = \frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow -\infty$.

Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} < 0,$$

per ogni $x \in (-\infty, 0)$.

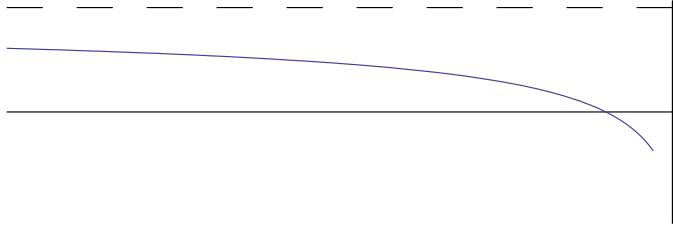


Figura 12: Grafico per l'esercizio 4 (13)

fig:Derivat

Allora, f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Si ha $f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, e $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} = -\infty$.

Il grafico è riportato in figura 12.

(14) Sia $f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2-x}$. Allora $\text{dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{1}{x^2-x} \leq 1 \right\} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{1-x^2+x}{x^2-x} \leq 0 \\ \frac{1+x^2-x}{x^2-x} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2-x-1}{x^2-x} \geq 0 \\ \frac{x^2-x+1}{x^2-x} \geq 0 \end{cases} \stackrel{(a)}{\iff} \begin{cases} x^2-x-1 \geq 0 \\ x^2-x > 0 \end{cases}$$

dove in (a) si è usato $x^2 - x + 1 > 0$, sempre.

Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{1}{x^2-x} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x^2-x)^2}}} \cdot \frac{-(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{(1-2x)|x^2-x|}{(x^2-x)^2 \sqrt{(x^2-x)^2-1}} = \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

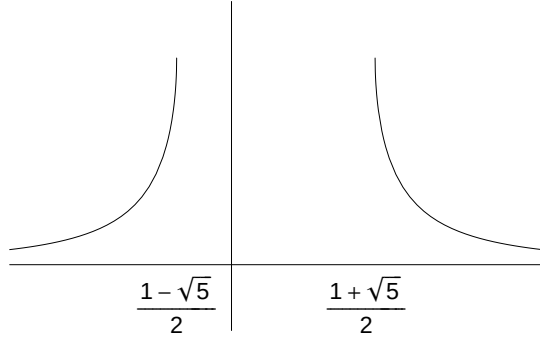


Figura 13: Grafico per l'esercizio 4 (14)

fig:Derivat

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$, e strettamente decrescente in $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. Si ha $f(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = -\infty, \end{aligned}$$

in quanto $(x^2-x)^2-1 = (x^2-x-1)(x^2-x+1) = 0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Il grafico è riportato in figura 13.

(15) Sia $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$. Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, f è continua, 2π -periodica, né pari né dispari. Per $x \rightarrow 0$, si ha $f(x) = \frac{1}{x}(1+o(1))$; per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}(1+o(1))$; per $x \rightarrow \pi$, si ha $f(x) = \frac{1}{\sin(\pi+x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\pi}(1+o(1))$; per $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{\sin(x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}}(1+o(1))$. Quindi $x = k\frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale di f , per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, per ogni $x \in \text{dom } f$, si ha $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \frac{1}{2} \sin 2x)}{\sin^2 x \cos^2 x} \geq 0 \iff \sin x - \cos x \geq 0 \iff x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \pmod{2\pi}$.

Allora, $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo relativo, mentre $\frac{5\pi}{4}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, $f(\frac{5\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$.

Il grafico è riportato in figura 14.

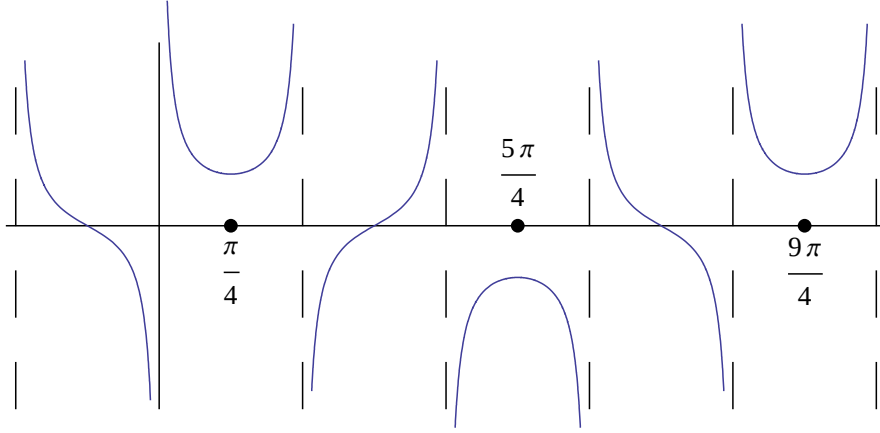


Figura 14: Grafico per l'esercizio 4 (15)

fig:Derivat

(16) Sia $f(x) = \sin \frac{1}{x^2+1}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin \frac{1}{x^2+1} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$. Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cos \frac{1}{x^2+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0]$, in quanto $0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, per cui $\cos \frac{1}{x^2+1} > 0$.

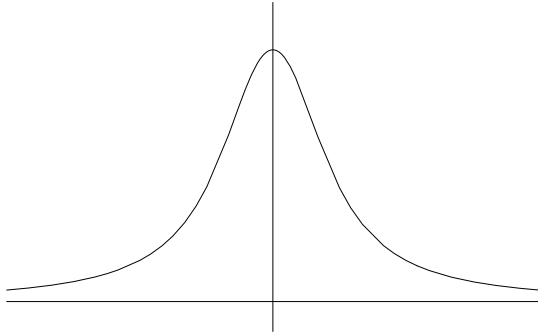


Figura 15: Grafico per l'esercizio 4 (16)

fig:Derivat

Allora, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \sin 1$.

Il grafico è riportato in figura 15.

(17) Sia $f(x) = \sin \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha $f(x) = \sin \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \sin 2 + o(1)$, per cui $y = \sin 2$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow \pm\infty$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sin g(x)$. Inoltre, $f'(x) = g'(x) \cos g(x) = \frac{6x}{(x+1)^2} \cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \iff \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}] \cup [0, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$.

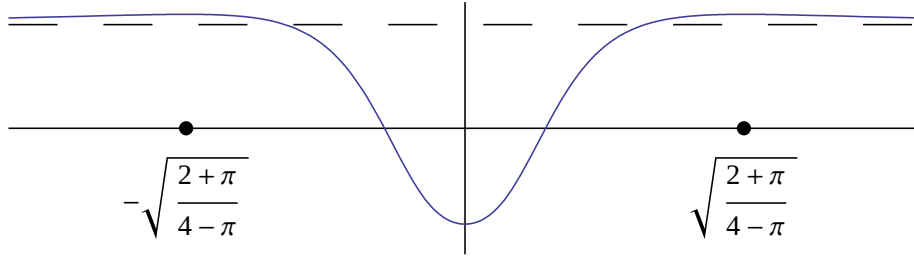


Figura 16: Grafico per l'esercizio 4 (17)

fig:Derivat

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di massimo relativo.

Si ha $f(0) = -\sin 1$, e $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 1$.

Il grafico è riportato in figura 16.

(18) Sia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}}$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sqrt{\cos g(x)}$. Allora $\text{dom } f = [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$, f è continua, e pari.

Inoltre, $f'(x) = \frac{-g'(x) \sin g(x)}{2\sqrt{\cos g(x)}} = -\frac{3x}{(x+1)^2} \frac{\sin \frac{2x^2-1}{x^2+1}}{\sqrt{\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}}}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\sin \frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq$

$0 \iff 0 \leq \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Si ha poi $f'_-(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} f'(x) =$

$-\lim_{x \rightarrow (\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} \frac{3\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}}{(\frac{2+\pi}{4-\pi}+1)^2} (1+o(1)) \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+o(1))}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}+o(1))}} = -\infty$.

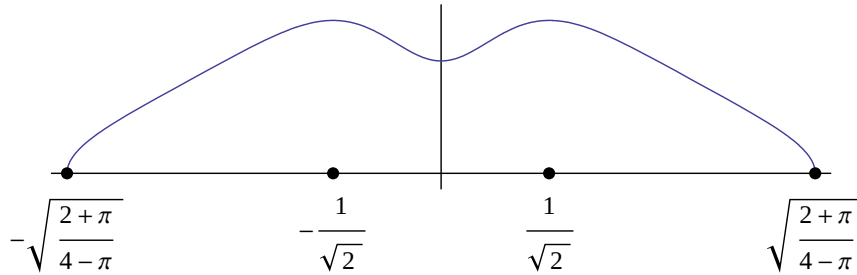


Figura 17: Grafico per l'esercizio 4 (18)

fig:Derivat

Allora, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di minimo relativo, e $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di massimo relativo. Si ha $f(0) = \sqrt{\cos 1}$, $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 0$, $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$.

Il grafico è riportato in figura 17.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{x+1}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x)e^{x+1} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)e^{x+1} &= +\infty \\ m_+ &:= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x)e^{x+1}}{x} = +\infty,\end{aligned}$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \rightarrow -\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \rightarrow +\infty$.

Inoltre, $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

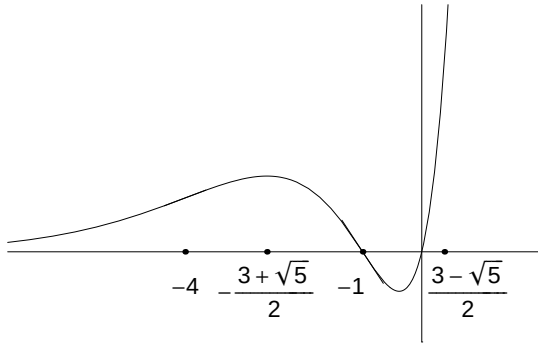


Figura 18: Grafico per l'esercizio 5 (1)

fig:Derivat

Allora, $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo per f , con $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ancora, $f''(x) = (x^2 + 5x + 4)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -4)$ e in $(-1, +\infty)$, ed è concava in $(-4, -1)$, mentre $x = -4$ e $x = -1$ sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 18.

(2) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{-(x+1)}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} &= +\infty \\ m_- &:= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x)e^{-(x+1)}}{x} = +\infty,\end{aligned}$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \rightarrow +\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \rightarrow -\infty$.

Inoltre, $f'(x) = -(x^2 - x - 1)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

Allora, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo per f , con $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

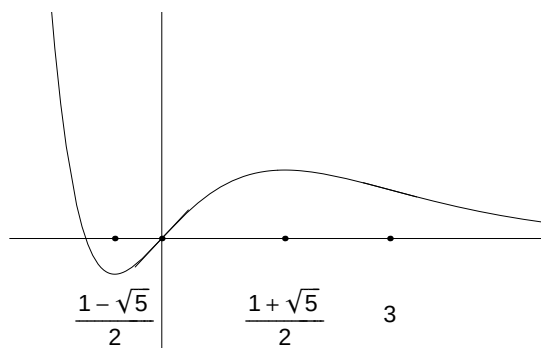


Figura 19: Grafico per l'esercizio 5 (2)

fig:Derivat

Ancora, $f''(x) = (x^2 - 3x)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(3, +\infty)$, ed è concava in $(0, 3)$, mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 19.

(3) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} &= e \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} e^{\frac{x}{x+1}} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} e^{\frac{x}{x+1}} &= +\infty, \end{aligned}$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre, $f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0$, per ogni $x \in \text{dom } f$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$. Inoltre, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f'(x) = 0$.

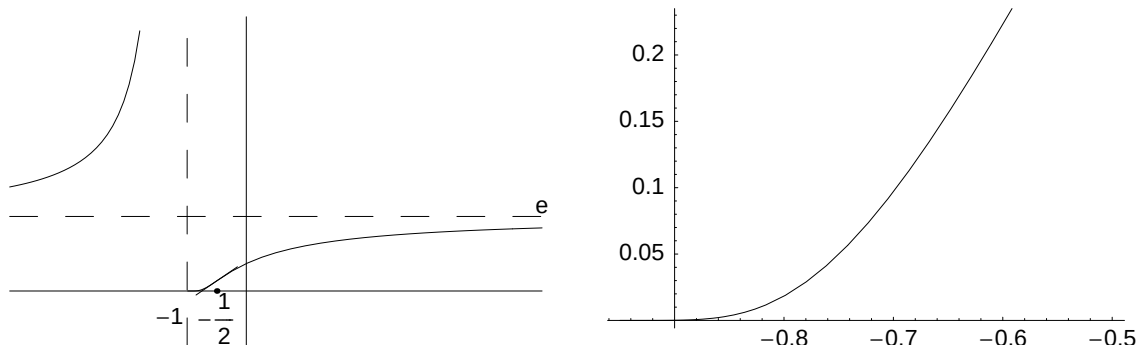


Figura 20: Grafico per l'esercizio 5 (3)

fig:Derivat

Ancora, $f''(x) = \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right) e^{\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 20, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(4) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{|x+1|}}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} &= e \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} &= \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} e^{\frac{x}{|x+1|}} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} e^{\frac{x}{|x+1|}} &= 0,\end{aligned}$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \rightarrow +\infty$, e asintoto orizzontale $y = \frac{1}{e}$, per $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{Inoltre, } f'(x) = \frac{|x+1|-x \operatorname{sgn}(x+1)}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{|x+1|}} = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$$

per cui $f'(x) > 0$, per ogni $x \in (-1, +\infty)$. Quindi, f è decrescente in $(-\infty, -1)$ e crescente in $(-1, +\infty)$ [per cui, $x = -1$ sarebbe un punto di minimo relativo, se $-1 \in \text{dom } f$]. Inoltre, $\lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} f'(x) = 0$.

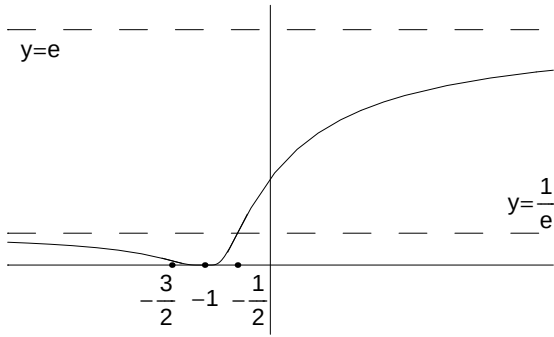


Figura 21: Grafico per l'esercizio 5 (4)

fig:Derivat

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4} \right) e^{-\frac{x}{x+1}} = \frac{2x+3}{(x+1)^4} e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4} \right) e^{-\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{-\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}]$. Quindi, f è convessa in $[-\frac{3}{2}, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\infty, -\frac{3}{2})$ e in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$ sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 21.

(5) Sia $f(x) = x - \log(x^2 + x + 1)$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R}$ [perché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$], f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - \log(x^2 + x + 1) &= \pm\infty \\ m_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - \log(x^2 + x + 1)}{x} = 1 \\ q_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - \log(x^2 + x + 1) - x = -\infty,\end{aligned}$$

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre, $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$, e decrescente in $(0, 1)$, per cui, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = 0$, e $x = 1$ è un punto di minimo relativo, con $f(1) = 1 - \log 3$.

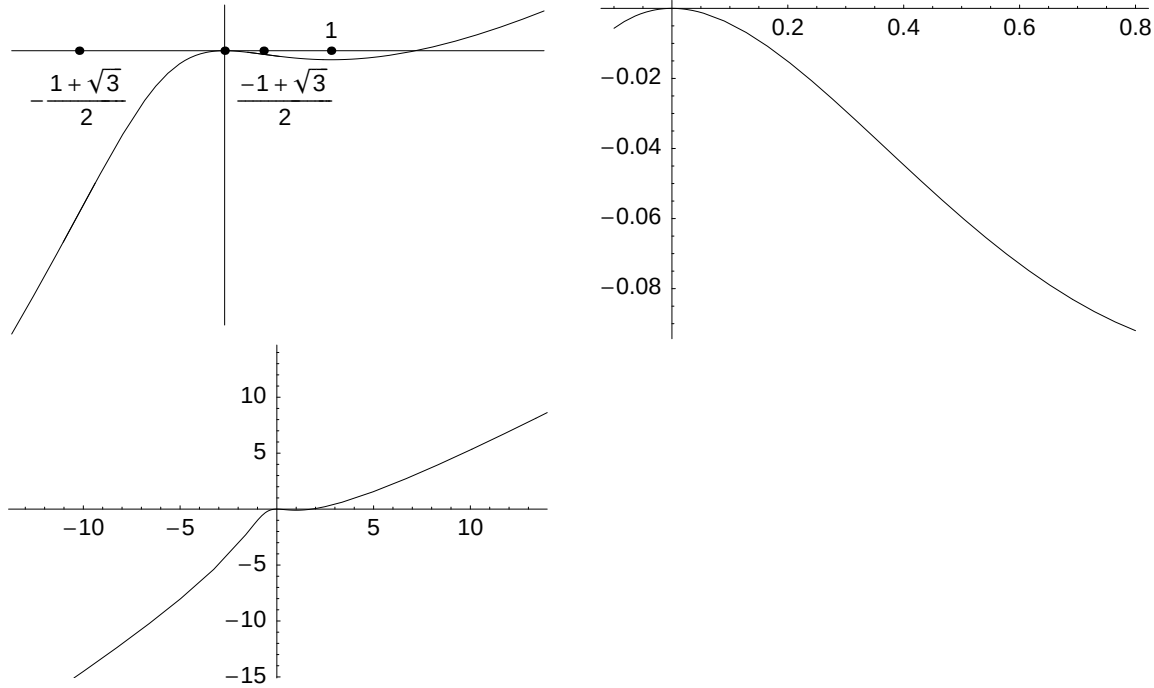


Figura 22: Grafico per l'esercizio 5 (5)

fig:Derivat

Ancora,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - x^2 + 2x^2 - x + 2x - 1) - (2x^3 + x^2 - 2x^2 - x)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 22, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(6) Sia $f(x) = |x| - \log(x^2 + x + 1)$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R}$ [perché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$], f è

continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| - \log(x^2 + x + 1) &= +\infty \\ m_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| - \log(x^2 + x + 1)}{x} = \pm 1 \\ q_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| - \log(x^2 + x + 1) - (\pm x) = -\infty,\end{aligned}$$

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} & x > 0 \\ -1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+x+1+2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-2, -1] \cup [1, +\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-2, -1)$ e in $(1, +\infty)$, e decrescente in $(-\infty, -2)$ e in $(-1, 1)$, per cui, $x = -2$ e $x = 1$ sono punti di minimo relativo, con $f(-2) = 2 - \log 3$ e $f(1) = 1 - \log 3$, e $x = -1$ è un punto di massimo relativo, con $f(-1) = 1$.

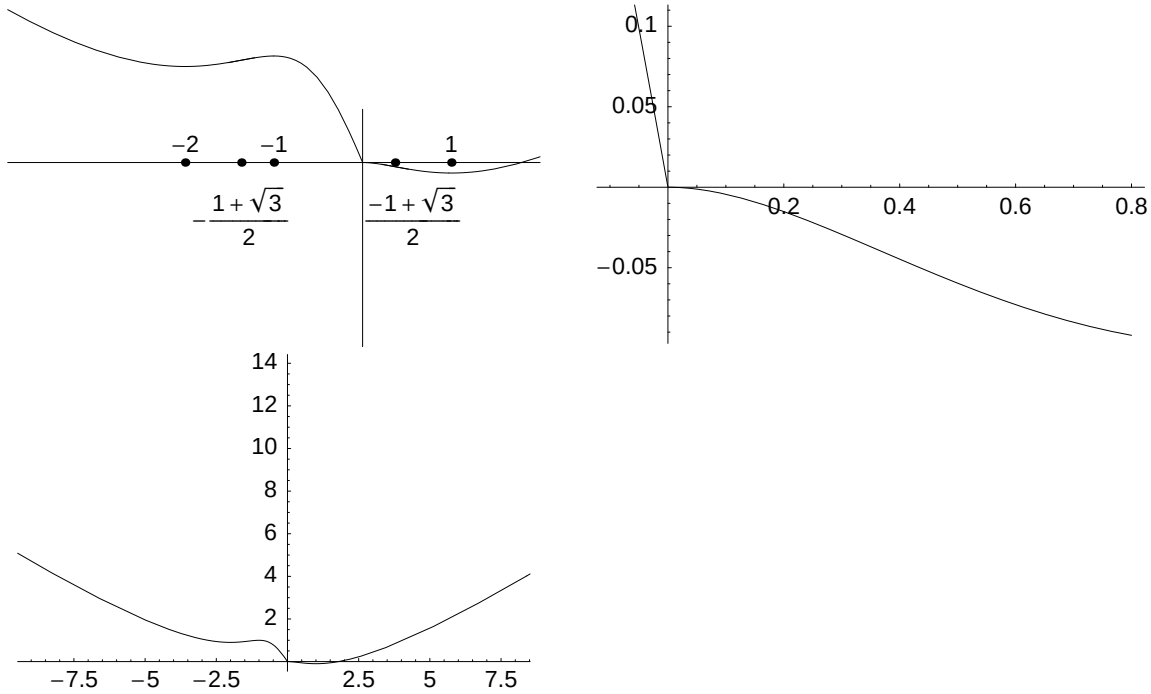


Figura 23: Grafico per l'esercizio 5 (6)

fig:Derivat

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x > 0 \\ -\frac{(2x+3)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+3x+2)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 23, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(7) Sia $f(x) = \frac{4|x^2+x|-1}{x^2}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4|x^2+x|-1}{x^2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{4|x^2+x|-1}{x^2} = -\infty,$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = 0$ e asintoto orizzontale $y = 4$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2+4x-1}{x^2} & x \leq -1 \text{ o } x > 0, \\ -\frac{4x^2+4x+1}{x^2} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x-1)}{x^4} = \frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2+2x}{x^4} = \frac{-4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(1-2x)}{x^3} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ -\frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x+1)}{x^4} = -\frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2-2x}{x^4} = \frac{4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(2x+1)}{x^3} & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Poiché

$$f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ \frac{1-2x}{x^3} \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{2x+1}{x^3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > 0 \end{cases}$$

ne segue che $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}]$. Quindi, f è crescente in $(-1, -\frac{1}{2})$ e in $(0, \frac{1}{2})$, e decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 0)$ e in $(\frac{1}{2}, +\infty)$, per cui, $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1) = -1$, e $x = \pm\frac{1}{2}$ sono punti di massimo relativo, con $f(-\frac{1}{2}) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) = 8$. Osserviamo che $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f'(x) = -6$, mentre $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f'(x) = 2$, per cui $x = -1$ è un punto angoloso.

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(-2x^3-3x^2(1-2x))}{x^6} = \frac{2(4x-3)}{x^4} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ \frac{2(2x^3-3x^2(2x+1))}{x^6} = \frac{-2(4x+3)}{x^4} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1, -\frac{3}{4})$ e in $(\frac{3}{4}, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$ sono punti di flesso per f . Il grafico è riportato in figura 24, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = -1$, e il comportamento per x grandi.

(8) Sia $f(x) = \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2} = -\infty,$$

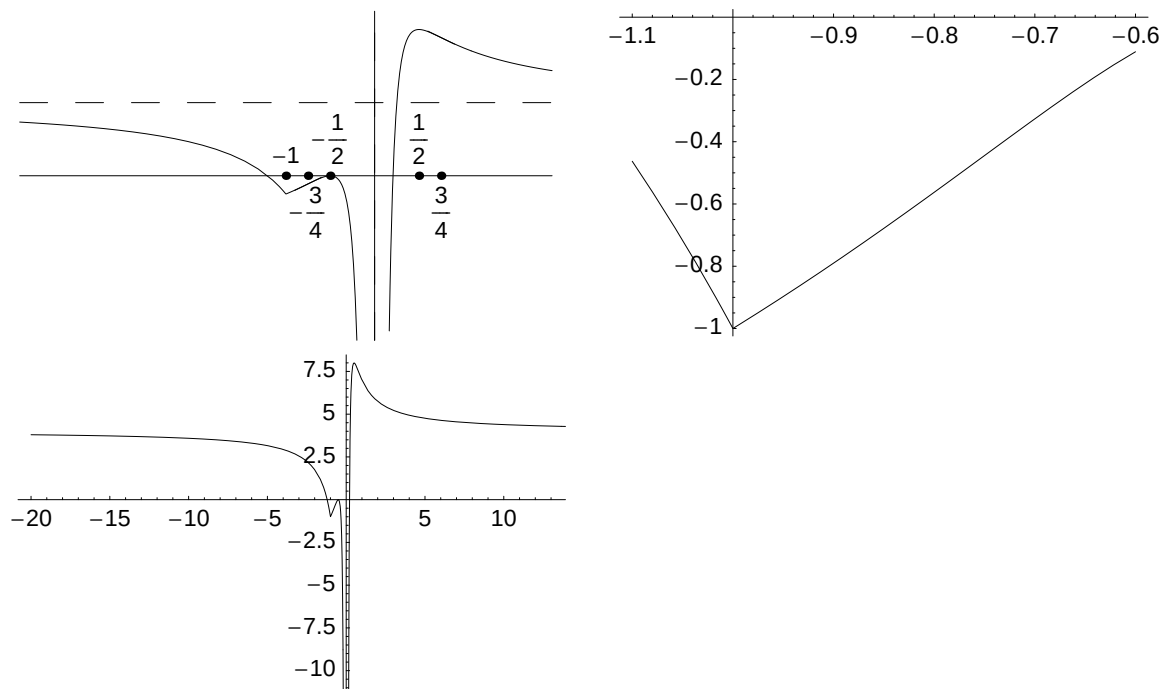


Figura 24: Grafico per l'esercizio 5 (7)

fig:Derivat

per cui f ha asintoto verticale in $x = 1$ e asintoto orizzontale $y = 1$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{(x-1)^2} & x \leq -1 \text{ o } x > 1, \\ -\frac{x^2}{(x-1)^2} & -1 < x < 1, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2)}{(x-1)^4} = \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 4}{(x-1)^3} = \frac{2(2-x)}{(x-1)^3} & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ -\frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)x^2}{(x-1)^4} = -\frac{2x^2 - 2x - 2x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x}{(x-1)^3} & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ \frac{2-x}{(x-1)^3} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{2x}{(x-1)^3} \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \leq 0 \text{ o } x > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

ne segue che $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-1, 0] \cup (1, 2]$. Quindi, f è crescente in $(-1, 0)$ e in $(1, 2)$, e decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(0, 1)$ e in $(2, +\infty)$, per cui, $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1) = -\frac{1}{4}$, e $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo, con $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$. Osserviamo che $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f'(x) = -\frac{3}{4}$, mentre $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f'(x) = \frac{1}{4}$, per cui $x = -1$ è un punto angoloso.

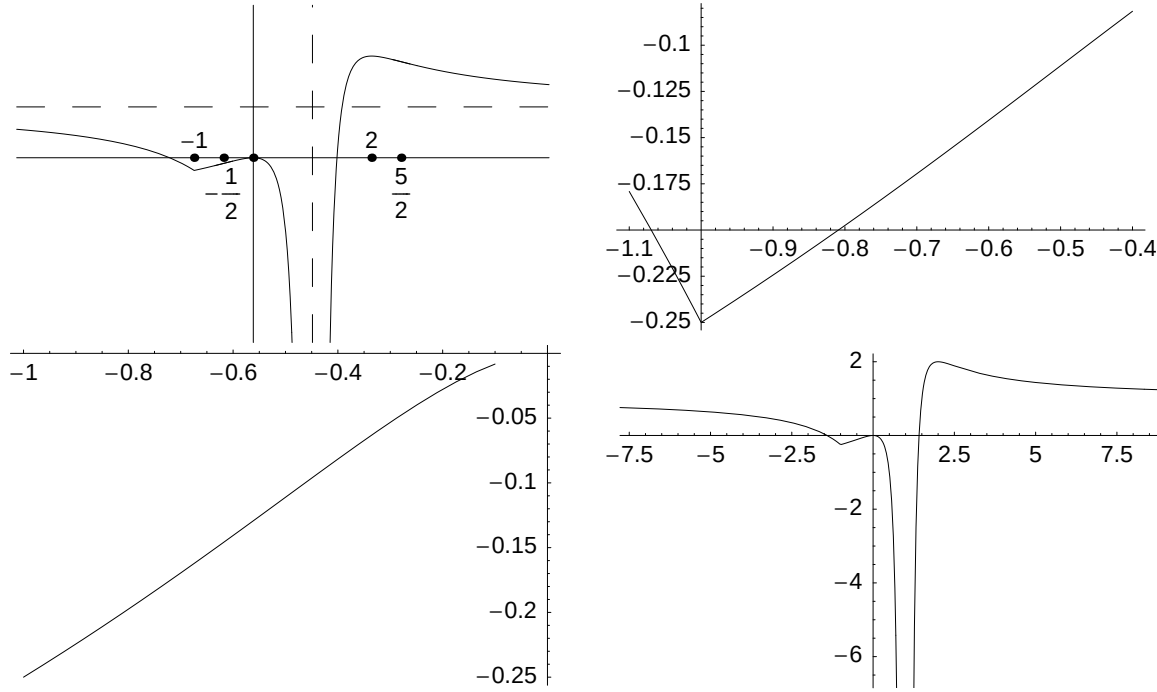


Figura 25: Grafico per l'esercizio 5 (8)

fig:Derivat

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(-(x-1)^3 - 3(x-1)^2(2-x))}{(x-1)^6} = \frac{2(2x-5)}{(x-1)^4} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ \frac{2((x-1)^3 - 3(x-1)^2x)}{(x-1)^6} = \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^4} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1, -\frac{1}{2})$ e in $(\frac{5}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, \frac{5}{2})$, mentre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{5}{2}$ sono punti di flesso per f . Il grafico è riportato in figura 25, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = -1$, in un intorno di $x = -\frac{1}{2}$, e il comportamento per x grandi.

(9) Sia $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - x^2)$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha $f(x) = -\frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui f ha asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre si ha $f'(x) = \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2}$. Poiché $f'(x) > 0 \iff x < 0$, ne segue che f è crescente in $(-\infty, 0)$, e decrescente in $(0, +\infty)$, per cui $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \frac{\pi}{4}$.

Ancora, $f''(x) = -2 \frac{1+(x^2-1)^2 - x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(1+(x^2-1)^2)^2} = -2 \frac{1+x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2}{(1+(x^2-1)^2)^2} = \frac{2(3x^4-2x^2-2)}{(1+(x^2-1)^2)^2}$ ed essendo $3x^4 -$

$2x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$. Quindi,

f è convessa in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$, mentre

$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 26.

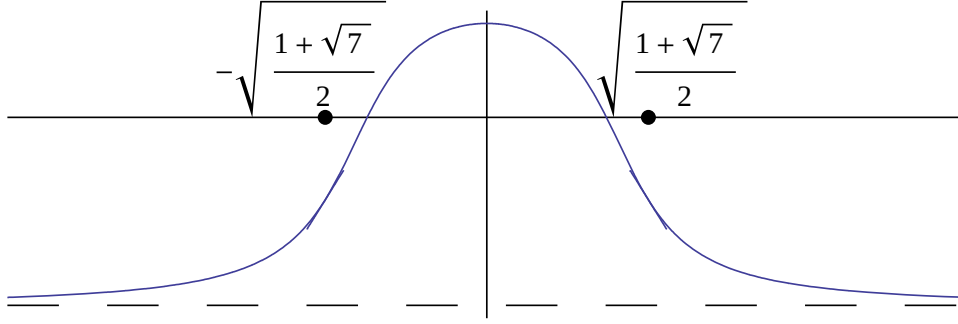


Figura 26: Grafico per l'esercizio 5 (9)

fig:Derivat

(10) Sia $f(x) = \arctg(1 - x^2) + \arctg\left(\frac{1}{|1 - x^2|}\right)$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, f è continua, e pari. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg(1 - x^2) + \arctg\left(\frac{1}{|1 - x^2|}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \arctg(1 - x^2) + \arctg\left(\frac{1}{|1 - x^2|}\right) = \frac{\pi}{2},$$

per cui f può essere prolungata per continuità anche in $x = \pm 1$, e ha asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \arctg(1 - x^2) + \arctg\left(\frac{1}{1 - x^2}\right) = \frac{\pi}{2} & -1 < x < 1, \\ \arctg(1 - x^2) + \arctg\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & x < -1 \text{ o } x > 1, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1, \\ \frac{-2x}{1 + (1 - x^2)^2} + \frac{-\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}}{1 + \frac{1}{(x^2 - 1)^2}} = \frac{-4x}{1 + (1 - x^2)^2} & x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

Poiché $f'(x) > 0 \iff x < -1$, ne segue che f è crescente in $(-\infty, -1)$, è costante in $(-1, 1)$, e decrescente in $(1, +\infty)$, per cui ogni $x \in [-1, 1]$ è un punto di massimo relativo, con $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Osserviamo che $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0$, mentre $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -4$, per cui $x = \pm 1$ sono punti angolosi.

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} -4 \frac{1 + (x^2 - 1)^2 - x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} = -4 \frac{1 + x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^4 + 4x^2}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} = \frac{4(3x^4 - 2x^2 - 2)}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ 0 & -1 < x < 1, \end{cases}$$

ed essendo $3x^4 - 2x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}}, +\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}}, -1)$ e in $(1, \sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}})$, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 27.

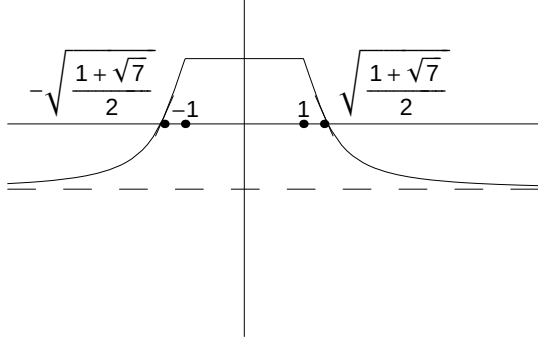


Figura 27: Grafico per l'esercizio 5 (10)

fig:Derivat

(11) Sia $f(x) = \frac{x^2+2|x|+1}{x+1}$. Allora $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0, \\ \frac{x^2-2x+1}{x+1} & x < 0, \end{cases}$$

basta studiare la funzione f per $x < 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} &= \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} &= \pm\infty \\ m_- &:= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)} = 1 \\ q_- &:= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - x}{x + 1} = -3, \end{aligned}$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = -1$ e asintoto obliquo $y = x - 3$, per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre, per $x < 0$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2+2x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \iff x \leq -3. \end{aligned}$$

Quindi, f è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(0, +\infty)$, e decrescente in $(-3, -1)$, e in $(-1, 0)$, per cui, $x = -3$ è un punto di massimo relativo, con $f(-3) = -8$, e $x = 0$ è un punto di minimo relativo, con $f(0) = 1$. Osserviamo che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -3$, mentre $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$, per cui $x = 0$ è un punto angoloso.

Ancora,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x+6}{(x+1)^3} \\ &= \frac{8}{(x+1)^3} > 0 \iff x > -1. \end{aligned}$$

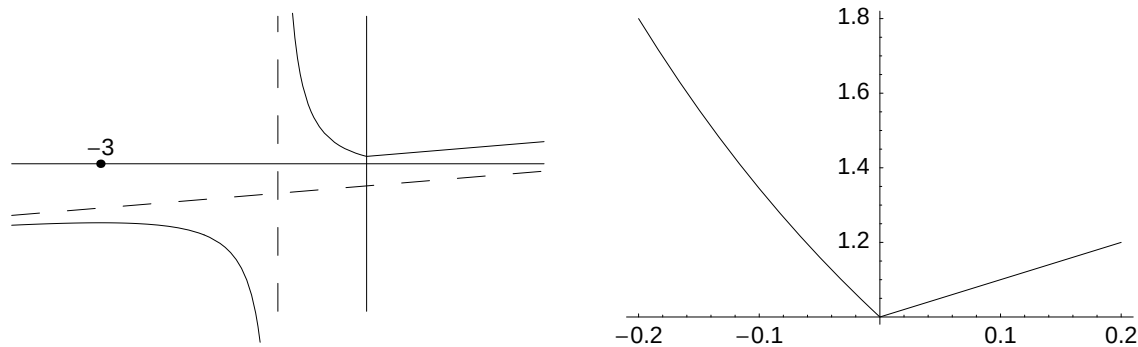


Figura 28: Grafico per l'esercizio 5 (11)

fig:Derivat

Quindi, f è convessa in $(-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, mentre non ci sono punti di flesso per f .

Il grafico è riportato in figura 28, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = 0$.

□

Svolgimento esercizio 6

- (1) Poiché $f'(x) = 3x^2e^{x^3} + \frac{6}{1+9x^2} > 0$, $x \in \mathbb{R}$, ne segue che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}$.
- (2) Poiché $f'(x) = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+e} > 0$, $x > 0$, ne segue che f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(\log(2+e)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2+e}{5}$.
- (3) Si ha $f'(x) = \frac{-1+\sin x}{5\sqrt[5]{(1-x-\cos x)^4}}$, $x \neq 0$, in quanto, posto $g(x) = 1 - x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, si ha $g'(x) = -1 + \sin x < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, per cui g è strettamente decrescente e quindi iniettiva in $\mathbb{R}$, e quindi si annulla solo per $x = 0$. Inoltre, $f'(x) < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\})$, per cui f è strettamente decrescente e quindi iniettiva in $\mathbb{R}$. Allora $(f^{-1})'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} (f^{-1})'(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5|o(1)|}{-1+o(1)} = 0$.
- (4) Si ha $f'(x) = 2e^{2x} - 4x$, $x \in \mathbb{R}$, e $f''(x) = 4e^{2x} - 4 \geq 0 \iff x \geq 0$, per cui f' è decrescente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $(0, +\infty)$, e ha un minimo assoluto in $x = 0$, che vale $f'(0) = 2$, per cui $f'(x) \geq 2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.
- (5) Si ha $f'(x) = x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e $f''(x) = 1 - e^x \geq 0 \iff x \leq 0$, per cui f' è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$, e ha un massimo assoluto in $x = 0$, che vale $f'(0) = -1$, per cui $f'(x) \leq -1 < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = -1$.

□

Svolgimento esercizio 7

- (1) Si ha $f(x) = \frac{1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - (1 - \frac{1}{2} \cdot 2x^2 + \frac{1}{4!} \cdot 4x^4 + o(x^4))}{x^4(1 + o(1))} = \frac{\frac{1}{3}x^4(1 + o(1))}{x^4(1 + o(1))} \rightarrow \frac{1}{3}$.

$$(2) \text{ Si ha } f(x) = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 2x^4 + \frac{1}{4!} \cdot 4x^8 + o(x^8) - (1 - x^4 + \frac{1}{2}x^8 + o(x^8))}{x^8(1 + o(1))} = \frac{-\frac{1}{3}x^8(1 + o(1))}{x^8(1 + o(1))} \rightarrow -\frac{1}{3}.$$

$$(3) \text{ Si ha } f(x) = \frac{x^2 - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2}{x^3(1 + x + o(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))} = \frac{\frac{1}{3}x^4(1 + o(1))}{x^4(1 + o(1))} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

$$(4) \text{ Si ha } f(x) = \frac{x^2(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x)}{(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^3 - x^3} = \frac{\frac{1}{6}x^5(1 + o(1))}{-\frac{1}{2}x^5(1 + o(1))} \rightarrow -\frac{1}{3}.$$

$$(5) \text{ Si ha } f(x) = \frac{(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2 - (x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4))}{x^2 - x(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^4(1 + o(1))} = \frac{\frac{1}{6}x^4(1 + o(1))}{-\frac{1}{6}x^4(1 + o(1))} \rightarrow -1.$$

$$(6) \text{ Si ha } f(x) = \frac{x^3 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^3}{x^5(1 + o(1))} = \frac{x^3 + o(x^5) - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)}{x^5(1 + o(1))} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$$(7) \text{ Si ha } f(x) = \frac{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 1 - x(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))}{x^2(1 + o(1)) \cdot x(1 + o(1))} = \frac{\frac{1}{2}x^3(1 + o(1))}{x^3(1 + o(1))} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

(8) Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) - (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2 - x^3}{x^4(1 + o(1))} \\ &= \frac{x^2 - x^3 + o(x^5) - x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4(1 + o(1))} = \frac{-\frac{11}{12}x^4(1 + o(1))}{x^4(1 + o(1))} \rightarrow -\frac{11}{12}. \end{aligned}$$

$$(9) \text{ Si ha } f(x) = \frac{6x - \frac{1}{6} \cdot (6x)^3 + \frac{1}{5!} \cdot (6x)^5 + o(x^5) - 6x(1 - 6x^2 + \frac{1}{2} \cdot 36x^4 + o(x^4))}{x^5(1 + o(1))} = \frac{-\frac{216}{5}x^5(1 + o(1))}{x^5(1 + o(1))} \rightarrow -\frac{216}{5}.$$

$$(10) \text{ Si ha } f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} - 1} = \frac{-\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))}{1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - 1} \rightarrow 2.$$

$$(11) \text{ Si ha } f(x) = \frac{\arctg(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)) - x^2}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6}(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4))^3 - x^2}{x^4} = \frac{-\frac{1}{2}x^4(1 + o(1))}{x^4} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

$$(12) \text{ Si ha } f(x) = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x - \log(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2(1 + o(1))} = \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2(1 + o(1))} = \frac{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))}{x^2(1 + o(1))} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

(13) Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\{(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2 - \log(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))\} \log(x + o(x))}{x^2(1 + o(1)) \cdot 2x(1 + o(1))} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) \cdot x(1 + o(1))}{2x^3(1 + o(1))} = \frac{\frac{3}{2}x^2(1 + o(1))}{2x^2(1 + o(1))} \rightarrow \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(14) Si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - e^{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2 - \frac{1}{6}(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3(1 + o(1))} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3(1 + o(1))} = \frac{\frac{1}{6}x^3(1 + o(1))}{\frac{1}{3}x^3(1 + o(1))} \rightarrow \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(15) Si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x + (x^2 + x) \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\
&= 3x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 2x + (x^2 + x)\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= 3x - \frac{3}{2} + o(1) - 2x - x - 1 - \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow -3.
\end{aligned}$$

(16) Si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 \left(1 - \cos \frac{2}{x} - x \log\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) + \frac{3}{x^5}\right) \\
&= x^4 \left(1 - \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x\left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) + \frac{3}{x^5}\right) \\
&= x^4 \left(-\frac{2}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \frac{2}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) + \frac{3}{x^5}\right) = -\frac{2}{3} + o(1) \rightarrow -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(17) Posto $y = x - 1$, si ha

$$\begin{aligned}
f(1+y) &= \frac{e^{1+y} - 4e^{\sqrt{1+y}} + 3e^{\sqrt[3]{1+y}}}{\log(1+y) - y} \\
&= \frac{e(1+y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) - 4e^{1+\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)} + 3e^{1+\frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)}}{y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) - y} \\
&= \frac{e(1+y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) - 4e(1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)) + 3e(1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{1}{18}y^2 + o(y^2))}{-\frac{y^2}{2}(1 + o(1))} \\
&= \frac{\frac{e}{3}y^2(1 + o(1))}{-\frac{y^2}{2}(1 + o(1))} \rightarrow -\frac{2}{3}e.
\end{aligned}$$

(18) Posto $y = x - \pi$, si ha

$$\begin{aligned}
f(\pi + y) &= \frac{y^2 - 8 + 8 \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2})}{4 \cos^2(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}) - y^2} = \frac{y^2 - 8 + 8 \cos(\frac{y}{2})}{4 \sin^2(\frac{y}{2}) - y^2} \\
&= \frac{y^2 - 8 + 8(1 - \frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{16 \cdot 24} + o(y^4))}{4(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{48} + o(y^3))^2 - y^2} = \frac{\frac{y^4}{48}(1 + o(1))}{-\frac{y^4}{12}(1 + o(1))} \rightarrow -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(19) Si ha

$$a_n = \frac{(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}) - \frac{1}{n})(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))}{1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o(\frac{1}{n^4}) - 1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4})} = \frac{-\frac{1}{3n^4}(1 + o(1))}{\frac{1}{12n^4}(1 + o(1))} \rightarrow -4.$$

(20) Si ha

$$a_n = \frac{e^{n^2 \log(1 + \frac{2}{n})} + e^{\sqrt{n} \log n}}{e^{2n} - e^{n(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{n}) \log 3}} = \frac{e^{n^2(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} + e^{\sqrt{n} \log n}}{e^{2n} - e^{n(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) \log 3}} = \frac{e^{2n-2+o(1)}(1 + o(1))}{e^{2n}(1 + o(1))} \rightarrow e^{-2}.$$

□