Asintoti, studio di funzioni e invertibilità

1. Studiare il dominio di definizione e gli asintoti delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-1}$; $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$; $f(x) = \frac{x^2+3|x|+2}{x-1}$

   (b) $f(x) = \frac{x^3-2x+2}{x^2-3x+2}$; $f(x) = \frac{x^3-2x+2}{x+2}$

   (c) $f(x) = x + \ln(x)$; $f(x) = x\arctan(x)$; $f(x) = \frac{x}{\arctan(x)}$

   (d) $f(x) = xe^{\frac{-1}{x}}$; $f(x) = xe^{\frac{x+1}{1-x}}$; $f(x) = xe^{\frac{x^2+1}{1-x}}$

   (e) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$; $f(x) = \sqrt{x^2-2|x|-8}$.

   (f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-2x^2-8}$; $f(x) = \sqrt[3]{x^3-2x-8}$.

   (g) $f(x) = x^2\ln(\frac{x+8}{x+9})$; $f(x) = x^2\ln(\frac{x+8}{x^2+9})$.

   (h) $f(x) = x + x\sin(\frac{2}{x})$.

   (i) $f(x) = \ln(e^{(1+2x-\frac{1}{x+1})} - 1)$

   (j) $f(x) = x|\ln(1-e^x)|$; $f(x) = |x+8|e^{\frac{x+\tau}{x-1}}$.

   (k) $f(x) = x\sin(\frac{1}{x^\alpha})$ per $\alpha \in (0, +\infty)$

2. Dopo aver calcolato l'equazione dell'asintoto obliquo a $\pm\infty$ delle seguenti funzioni, stabilire se la funzione maggiora o minora definitivamente a $\pm\infty$ il corrispondente asintoto:

   (a) $f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$

   (b) $f(x) = \frac{x^3-x+2}{x^2-3}$

   (c) $f(x) = \sqrt{4x^2-x+6}$

   (d) $f(x) = xe^{\frac{-1}{x}}$

3. Studiare il grafico delle seguenti funzioni (dominio ed asintoti; continuità e derivabilità; intervalli di monotonia; max/min locali e assoluti; immagine; grafico della funzione)

   (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

   (b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$

   (c) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1} + \ln(x-1)$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}$

   (e) $f(x) = \sqrt{x^2-5x-36}$

   (f) $f(x) = \sqrt{|x^2-5x-36|}$

   (g) $f(x) = \frac{x^2-2|x|+1}{x}$

   (h) $f(x) = \frac{x|x|-2x-8}{x+6}$

   (i) $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2+4}$

   (j) $f(x) = xe^{\arctan(x)}$; $f(x) = x^2e^{\arctan(x)}$

   (k) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

   (l) $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)}$

   (m) $f(x) = x(3-(\ln(x))^2)$

   (n) $f(x) = \ln(1+x^2) - \arctan(x) + x$

   (o) $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

   (p) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+5}e^{\frac{1}{x}}$

   (q) $f(x) = x^{\ln(x)}$

(r) $f(x) = \arctan(|x^2 - 1|)$

(s) $f(x) = xe^{1/\ln(x)}$

4. Studiare le funzioni elencate: dominio di definizione; asintoti; crescenza e decrescenza; punti di non derivabilità, max/min locali; convessità.

   (a) $f(x) = x^2 \ln(x)$; $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$

   (b) $f(x) = (x^2 - 4x + 1)^{x+2}$

   (c) $f(x) = xe^{-x} \ln(x)$

   (d) $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{x})$

   (e) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$

   (f) $f(x) = e^x - x^2$; $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2$;

   (g) $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|(x+1)x^2}}{x}$

   (h) $f(x) = e^x - \alpha x^2$, $\alpha > 0$; $f(x) = e^x - 3x^2$

5. Studiare gli insiemi in cui sono invertibili le seguenti funzioni e calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto di coordinate $y_0 = f(x_0)$ indicato nell'esercizio.

   (a) $f(x) = x + \arctan(x)$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$

   (b) $f(x) = x \arctan(x)$, $x_0 = 2$

   (c) $f(x) = \ln(x) + \frac{x-2}{x+6}$

   (d) $f(x) = e^x + \arctan(x)$, $x_0 = 0$

6.1 Esempi

1. Sia data la funzione
$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}.$$

   (a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui.

   (b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.

   (c) Tracciare il grafico della funzione.

   N.B. non si richiede lo studio della derivata seconda della funzione.

   Svolgimento.

   (a) La funzione è definita in $(0, +\infty)$ in quanto $(x+2)^2 \geq 0$ e $|\ln(x)| \geq 0$. Quindi l'unica condizione che definisce il dominio della funzione $f(x)$ è il dominio del logaritmo. Per quanto riguarda gli asintoti
$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|} = \sqrt{4 + |\ln(x)| + o(1)} = +\infty$$
   Quindi in 0 c'è un asintoto verticale. Mentre per $x \to +\infty$ si osservi che
$$\begin{aligned}\sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|} &= |x+2| \cdot \sqrt{1 + \frac{|\ln(x)|}{(x+2)^2}} \\ &= (x+2) \cdot \left(1 + \frac{|\ln(x)|}{2(x+2)^2} + o\left(\frac{|\ln(x)|}{(x+2)^2}\right)\right) \\ &= (x+2) + \frac{|\ln(x)|}{2(x+2)} + o\left(\frac{|\ln(x)|}{(x+2)}\right) \\ &= x + 2 + o(1).\end{aligned}$$
   Quindi la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo a $a + \infty$.

(b) Per quanto riguarda la derivabilità si osservi che nella definizione di $f(x)$ compaiono sia la $|x|$ che la funzione $\sqrt{x}$, che sono funzioni derivabili nel loro dominio tranne che nel punto $x = 0$. Si osservi che l'argomento del modulo si annulla nel punto $x = 1$, mentre l'argomento della radice non si annulla mai. Di conseguenza per tutti gli $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ la funzione $f(x)$ risulta derivabile ed in tale regione la derivata può essere calcolata usando le regole di derivazione. Di conseguenza studieremo la monotonia di $f(x)$ per tutti gli $x \neq 1$ studiando il segno della derivata di $f(x)$. Mentre di seguito studieremo la derivabilità di $f(x)$ in $x = 1$. $x \neq 1$ In questa regione

$$f'(x) = \frac{2x + 4 + \mathrm{sgn}(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} = \frac{2x^2 + 4x + \mathrm{sgn}(\ln(x))}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}}$$

$$= \begin{cases} \frac{2x^2+4x+1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2+|\ln(x)|}}, & x > 1; \\ \frac{2x^2+4x-1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2+|\ln(x)|}}, & 0 < x < 1; \end{cases}$$

dove $\mathrm{sgn}(\ln(x))$ indica la funzione segno di $\ln(x)$:

$$\mathrm{sgn}(\ln(x)) = \begin{cases} 1, & \ln(x) > 0 \iff x > 1; \\ -1, & \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1. \end{cases}$$

In entrambi i casi il denominatore è sempre positivo. Quindi lo studio del segno della derivata prima dipende esclusivamente dal numeratore. In particolare $x > 1$ Il segno di f' è quello $2x^2 + 4x + 1$. Le radici dell'equazione $2x^2 + 4x + 1 = 0$, sono $x_\pm = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$ Sono tutte e due negative. Quindi $f'(x) > 0$ per $x > 1$. $x < 1$ Il segno di f' è quello $2x^2 + 4x - 1$. Le radici dell'equazione $2x^2 + 4x - 1 = 0$, sono $x_\pm = \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$ In questo caso una radice è negativa. Per l'altra radice si ha

$$0 < \frac{-2+\sqrt{6}}{2} < 1$$

Quindi $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$ e $f'(x) > 0$ per $\frac{-2+\sqrt{6}}{2} < x < 1$. Riassumendo

$$f'(x) \text{ è } \begin{cases} < 0, & 0 < x < \frac{-2+\sqrt{6}}{2}; \\ = 0, & x = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}; \\ > 0, & \frac{-2+\sqrt{6}}{2} < x < 1; \\ \text{crescente} & x > 1 \end{cases}$$

In particolare $x = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$ è un minimo relativo (assoluto, in realtà) di $f(x)$. $x = 1$ Rimane da discutere la derivabilità della funzione in $x = 1$. Dal momento che la funzione è continua in 1 e le derivate esistono in un'intorno di 1 possiamo utilizzare il corollario del teorema di Lagrange il quale afferma che se il limite destro/sinistro delle derivate esiste finito o infinito allora coincide con la derivata destra/sinistra della funzione. Osservando che

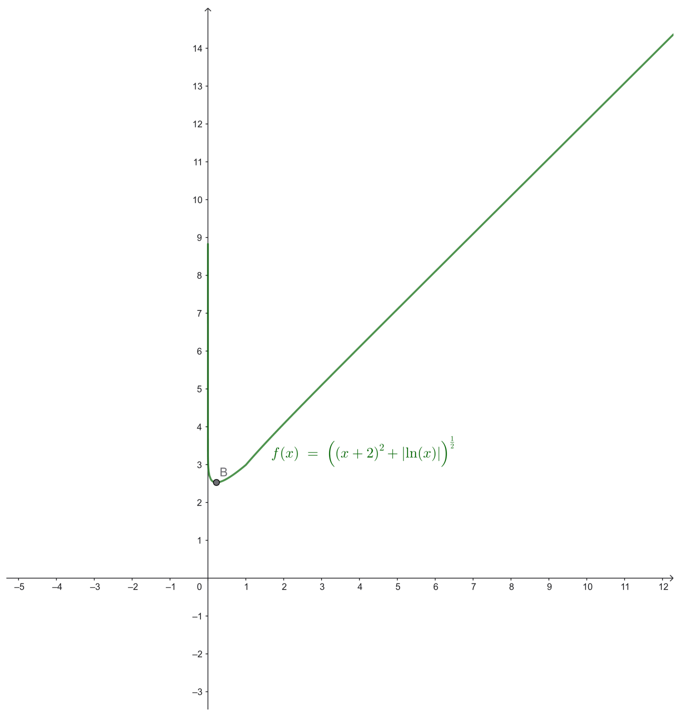
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2 + 4x - 1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} = \frac{5}{6} = f'_-(1)$$

e che

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2 + 4x + 1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} = \frac{7}{6} = f'_+(1)$$

si ha che $f'_+(1) \neq f'_-(1)$. Quindi la funzione non è derivabile in 1.

(c) Per quanto riguarda il grafico della funzione si ha:



2. Data la funzione
$$f(x) = (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x}$$

   (a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui/orizzontali.
   (b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
   (c) Tracciare il grafico della funzione.

   Svolgimento

   (a) Il dominio della funzione è dato dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \iff x(x-1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ x \neq 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

Quindi gli asintoti vanno studiati $a \pm \infty$ e in 0 punto di frontiera del dominio. Si osservi che per $x \to 0^-$ si ha che $-1/x \to +\infty$, quindi per il limite notevole potenze/esponenziali si ha che
$$f(x) = (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x} = -xe^{-1/x}(1 + o(1)) \xrightarrow{x \to 0^-} +\infty$$
Quindi 0 è un asintoto verticale. Inoltre per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x} = |x|(1 - 1/x)^{1/2} e^{-1/x} \\ &= |x|(1 - 1/2x + o(1/x))(1 - 1/x + o(1/x)) \\ &= |x|(1 - \frac{3}{2x} + o(1/x)) \end{aligned}$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{2} + o(1), & x \to +\infty, \\ -x + \frac{3}{2} + o(1), & x \to -\infty. \end{cases}$$

Quindi $a + \infty$ l'asintoto obliquo ha equazione $y = x - \frac{3}{2}$. L'asintoto $a - \infty$ ha equazione $y = -x + \frac{3}{2}$.

(b) La funzione è derivabile in $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ perché composizione, somma e prodotto di funzioni derivabili in tale insieme. In particolare

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-1/x}\frac{2x-1}{2(x^2-x)^{1/2}} + e^{-1/x}\frac{1}{x^2}(x^2-x)^{1/2} \\
&= \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}(x(2x-1)+2(x^2-x)) \\
&= \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}(2x^3-x^2+2x^2-2x) \\
&= \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}(2x^3+x^2-2x) = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}x(2x^2+x-2).
\end{aligned}
$$

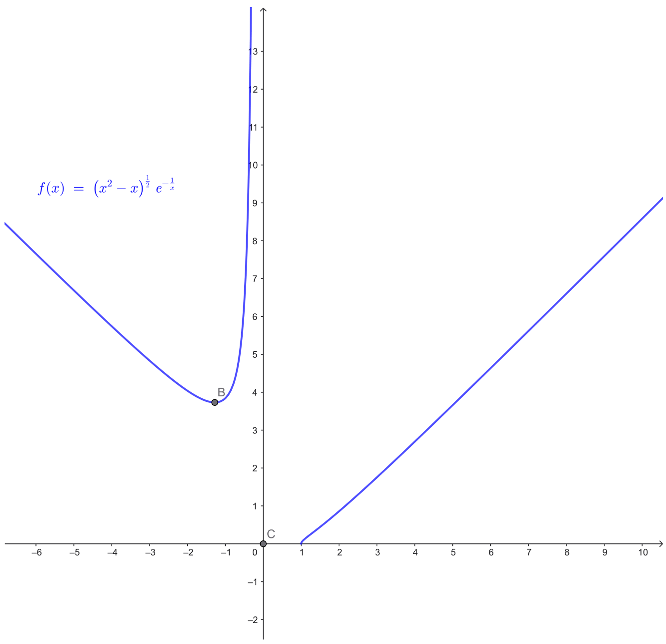
Il segno della derivata prima dipende dal prodotto di x per il polinomio di secondo grado $(2x^2+x-2)$, le cui radici sono $x_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$. Si osservi che $0 < \frac{-1+\sqrt{17}}{4} < 1$ quindi tale radice cade fuori dal dominio di definizione. Quindi il segno di f' ha

Intervallo	$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4})$	$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$	$(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, 0)$	0	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	N.D.	$+$
$f(x)$	Decrescente	Min. Rel.	Crescente	Asintoto	Crescente

Di conseguenza per quanto riguarda la monotonia della funzione si ha che $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ è un minimo relativo. Il grafico si evince dalla monotonia dagli asintoti e dal fatto che $f(x)$ è sempre ≥ 0: Per quanto riguarda la derivabilità in 1^+ si osservi che la funzione è continua in tal punto. Inoltre

$$
f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}x(2x^2+x-2) = \frac{e^{-1}}{2((x-1))^{1/2}}(1+o(1)) \xrightarrow{x\to 1^+} +\infty
$$

quindi per il corollario del teorema di Lagrange la derivata destra in 1 non esiste. Più precisamente 1 è un punto a tangente verticale.



3. Sia data la funzione

$$
f(x) = x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

(a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui.

(b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.

(c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

(a) Il dominio della funzione è individuato dalla disequazione

$$\frac{4x}{x-2} \geq 0 \text{ e } x \neq 2$$

Da cui si evince che il dominio è l'insieme $D_f = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$. Quindi dovremo studiare l'esistenza di asintoti in 2^+ e $\pm\infty$. Studiamo prima l'esistenza di un asintoto verticale in 2^+ : si osservi che per $x \to 2^+$ si ha

$$f(x) = x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{8}}{(x-2)^{1/2}}(1 + o(1)) \to +\infty$$

Quindi $f(x)$ ha un asintoto verticale in 2^+. Per quanto riguarda $\pm\infty$ si osservi che per $x \to \pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) = x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} &= 2x\left(1 + \frac{2}{x-2}\right)^{1/2} \\ &= 2x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x-2} + o(x^{-1})\right) \\ &= 2x + 2\frac{x}{x-2} + o(x^{-1}) \\ &= 2x + 2 + \frac{4}{x-2} + o(x^{-1})) \\ &= 2x + 2 + o(1). \end{aligned}$$

Quindi $a + \infty$ e $-\infty$ sono presenti due asintoti obliqui aventi la stessa equazione

$$y = 2x + 2$$

(b) La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Studiamo il segno della derivata in tale insieme per capire la monotonia. Dopodichè studieremo la derivabilità di f in 0. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{8}{(x-2)^2} \\ &= \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} - x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4}{(x-2)^2} \\ &= \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4x}{x-2} - \frac{4x}{(x-2)^2}\right) \\ &= \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4x}{(x-2)^2}(x-2-1) \\ &= \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4x}{(x-2)^2}(x-3). \end{aligned}$$

Per cui il segno della derivata nella regione in esame dipende dal polinomio di secondo grado $(x^2 - 3x) = x(x-3)$. Di conseguenza:

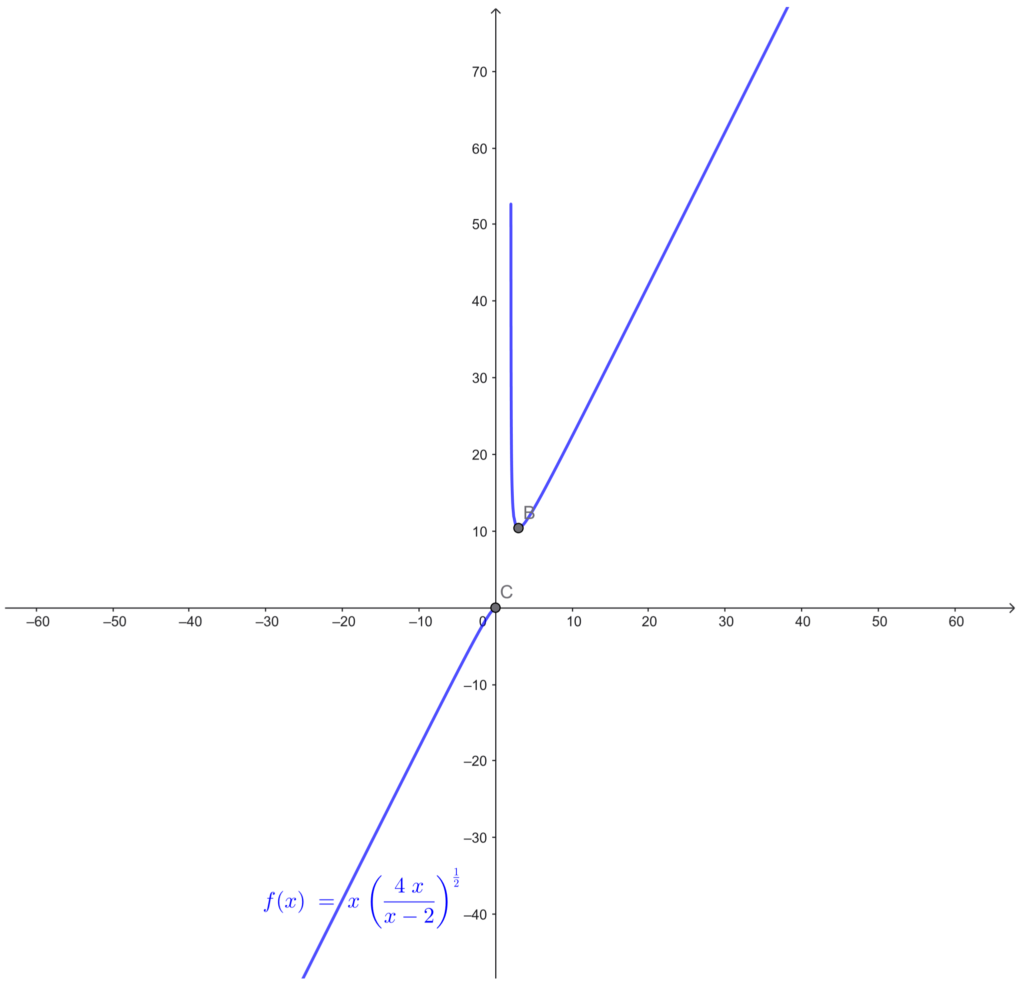
$$f'(x) \text{ è } \begin{cases} > 0 & x \in (-\infty, 0) \\ < 0 & x \in (2, 3) \\ = 0 & x = 3 \\ > 0 & x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

Quindi il punto $x = 3$ è un minimo relativo. $x = 0$ Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si osservi che la funzione è continua in 0 perchè composizione di funzioni continue. Si osservi inoltre che

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

Per il corollario del teorema di Lagrange si ha che f è derivabile in 0 da sinistra con derivata $f'_-(0) = 0$.

(c) Usando i risultati di sopra si traccia il seguente grafico:



4. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})}$$

(a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui/orizzontali.

(b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.

(c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

(a) Il dominio della funzione è dato dal sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x^2+1} > 0, & \iff x > -1, \\ \ln(\frac{x+1}{x^2+1}) \neq 0 & \iff \frac{x+1}{x^2+1} \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1, \\ \frac{x+1-x^2-1}{x^2+1} \neq 0 & \iff \frac{x(1-x)}{x^2+1} \neq 0 \end{cases} \iff x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Quindi gli asintoti vanno studiati a $+\infty$ e in $-1, 0$ e 1 punti di frontiera del dominio:

$$x \to -1^+ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(0^+/2)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

$$x \to +\infty \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(0^+)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Nei punti 0 e 1 l'argomento del logaritmo tende a 1. Tuttavia per capire se tende a 1 per eccesso o per difetto conviene studiare dove l'argomento del logaritmo è minore o maggiore di 1:

$$\frac{x+1}{x^2+1} > 1 \iff \frac{x+1-x^2-1}{x^2+1} > 0 \iff x(1-x) > 0$$

quindi l'argomento $\frac{x+1}{x^2+1} > 1$ per $x \in (0,1)$; $\frac{x+1}{x^2+1} < 1$ per $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$. Quindi per

$$x \to 0^- \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$x \to 0^+ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \to 1^- \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \to 1^+ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

(b) La funzione è derivabile nel suo dominio perché composizione di funzioni derivabili in tale insieme. In particolare

$$f'(x) = -\ln^{-2}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x^2+1}{x+1} \frac{1}{(x^2+1)^2} \left(x^2+1-2x(x+1)\right)$$

Il segno della derivata prima dipende solo dal segno del polinomio

$$-\left(x^2+1-2x(x+1)\right) = x^2+2x-1$$

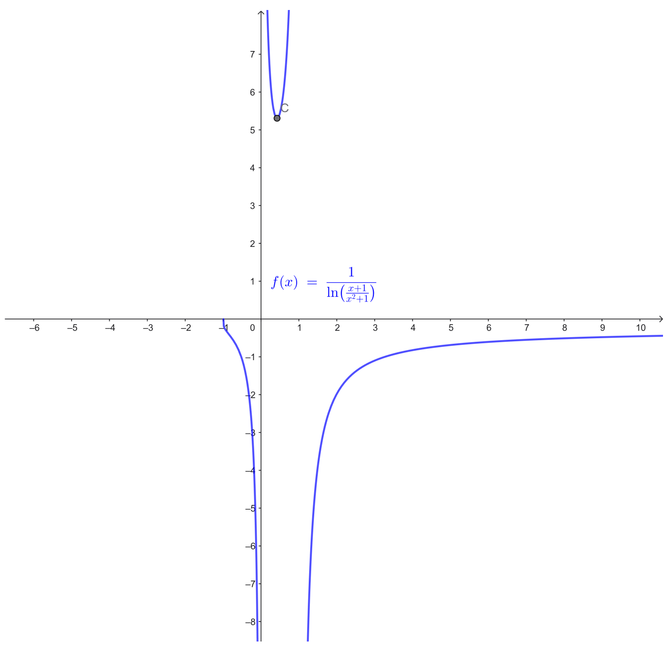
in quanto tutti gli altri fattori sono ≥ 0. In particolare $\frac{x^2+1}{x+1}$ è l'inverso dell'argomento del logaritmo, quindi è sempre > 0 nel dominio di definizione. Quindi

$$x^2+2x-1 > 0 \iff x \in \left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}, +\infty\right)$$

e

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & x \in (-1,0) \cup \left(0, -1+\sqrt{2}\right) \\ = 0 & x = -1+\sqrt{2} \\ > 0 & x \in \left(-1+\sqrt{2}, 1\right) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

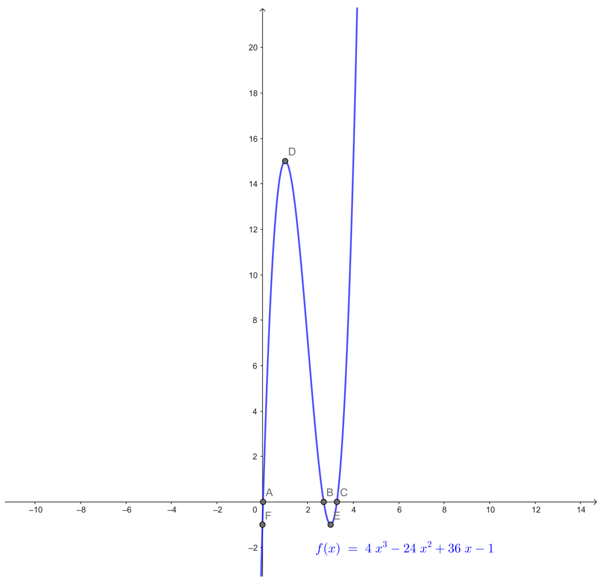
Il punto $x = -1+\sqrt{2}$ è un minimo relativo. Un grafico qualitativo della funzione è



5. Data la funzione
$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$$
   (a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui/orizzontali.
   (b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
   (c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

(a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$ e non ci sono asintoti obliqui in quanto si tratta di un infinito di ordine 4. Per studiare la monotonia calcoliamo la derivata prima
$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x - 1$$
Dato che si tratta di un polinomio di grado 3 non riusciamo a studiare il segno di f' risolvendo la disuguaglianza $f'(x) > 0$ (a meno che non conosciamo uno zero di $f'(x)$). Un modo per capire la monotonia di f ed in particolare l'esistenza di estremi relativi consiste nello studiare il grafico di f'. Questo permette di capire il segno di f' e quindi la monotonia di f. Quindi si osservi che
$$x \to +\infty \Rightarrow f'(x) \to +\infty$$
$$x \to -\infty \Rightarrow f'(x) \to -\infty$$
Per quanto riguarda la monotonia si ha
$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3)$$
e le radici del polinomio di secondo grado sono $x_\pm = 2 \pm \sqrt{4-3} = 1, 3$. Quindi
$$f''(x) \begin{cases} > 0 & x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ < 0 & x \in (1, 3) \end{cases}$$
Abbiamo due informazioni: 1) $f(x)$ è convessa nelle regioni $(-\infty, 1), (3, +\infty)$ e concava in $(1, 3)$; 2) f' ha un massimo relativo in 1 ed un minimo relativo in 3. Ora si osservi che
$$f'(1) = 15 > 0$$
$$f'(3) = -1 < 0$$
Osservando che: f' è crescente in $(-\infty, 1)$ e che tende a $-\infty$ a $-\infty$ e che $f'(1) > 0$ si deduce che f' ha uno zero $\bar{x}_1$ in $(-\infty, 1)$. In particolare, dato che $f'(0) = -1$ si ha che $\bar{x}_1 \in (0, 1)$. In maniera analoga dato che $f'(3) < 0$ e che 3 è un minimo, f' ha uno zero $\bar{x}_2 \in (1, 3)$. Infine avrà un altro zero $\bar{x}_3$ in $(3, +\infty)$. Il grafico di f' è il seguente



(b) Quindi in base al segno della derivata prima possiamo dedurre che la funzione f avrà un massimo relativo in $\bar{x}_1$, un minimo relativo in $\bar{x}_2$ ed infine un massimo relativo in $\bar{x}_3$. Inoltre come già osservato è convessa nelle regioni $(-\infty, 1), (3, +\infty)$ e concava in $(1, 3)$. Il grafico di f è il seguente