

Continuità e derivabilità

1. Studiare la continuità in tutto il dominio di definizione delle funzioni elencate

$$(a) f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{\frac{-1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)(x^2 - (\pi/2)^2)}{x}, & x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2), \\ -(\pi/2)^2 & x = 0, \\ -2 & x = \pi/2, \\ 2 & x = -\pi/2. \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

2. Studiare al variare del parametro la continuità delle funzioni elencate

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+2x^\alpha} - \cos(x)}{x+x^\alpha}, & x > 0, \\ 2/3 & x = 0, \end{cases} \quad \text{per } \alpha > 0$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^{(\alpha-1)})}{\alpha x}, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ \frac{\arctan(1/x)}{-\pi}, & x < 0. \end{cases} \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ le funzioni elencate si possono estendere per continuità

$$(a) f(x) = \frac{\ln(1+x^{(\alpha-1)})}{\alpha x}, \quad x > 0.$$

$$(b) f(x) = \frac{\sin(x^\alpha) + \alpha x^2}{x^2}, \quad x > 0.$$

$$(c) f(x) = \frac{\ln^{2\alpha}(1+x)}{x^2 \arctan(\alpha x^\alpha)}, \quad x > 0$$

4. Studiare la continuità e la derivabilità delle funzioni elencate in tutto il loro dominio di definizione e calcolare la derivata nei punti in cui la funzione risulta derivabile.

$$(a) f(x) = \sin(|x|) \quad , \quad f(x) = x \sin(|x|)$$

$$(b) f(x) = \sin(x-1) \sqrt[3]{x^2-1}, \quad f(x) = \sqrt[3]{\ln(x)}$$

$$(c) f(x) = \sin(|x-1|) - |x-1| \quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$$

$$(d) f(x) = \sqrt[3]{1 - \cos(x)} \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$(e) f(x) = (1 - \cos(x))^{3/5}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$(f) f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(|x|) \right)^{3/5}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$(g) f(x) = |\sin(x^2-4)| \ln(3-x) \quad , \quad f(x) = \sin(|x|-2) \ln(3-x)$$

$$(i) f_1(x) = \begin{cases} \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{(j)} \quad f_2(x) &= \begin{cases} x \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\
\text{(k)} \quad f_3(x) &= \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\
\text{(l)} \quad f_4(x) &= \begin{cases} |x|^\alpha \sin(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\
\text{(m)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) + \alpha x & x > 0 \\ x e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\
\text{(n)} \quad f(x) &= \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \\
\text{(o)} \quad f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

5. Trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che le seguenti funzioni risultino derivabili

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} \sqrt{e^{x-1} + 1} & x > 1 \\ \alpha x + \beta x^2 & x \leq 1 \end{cases} \\
\text{(b)} \quad f(x) &= \begin{cases} \arctan(\alpha(x^2 - 1)) & x > 1 \\ \beta + \ln(1 + x^2) & x \leq 1 \end{cases} \\
\text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} \sqrt{\cosh(x)} & x \geq 0 \\ \alpha + \beta x & x < 0 \end{cases} \\
\text{(d)} \quad f(x) &= \begin{cases} (x - 1)e^x & x \geq \alpha \\ (x - \alpha)^2 + \beta x(x - \alpha) & x < \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

6. Dimostrare usando i teoremi sulla derivazione le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \arctan(x) &= \begin{cases} \pi/2 - \arctan(1/x), & x > 0 \\ -\pi/2 - \arctan(1/x), & x < 0 \end{cases} \\
\text{(b)} \quad \arcsin(x) &= \begin{cases} \pi/2 - \arcsin(\sqrt{1 - x^2}), & x \in (0, 1) \\ -\pi/2 + \arcsin(\sqrt{1 - x^2}), & x \in (-1, 0) \end{cases} \\
\text{(c)} \quad \arccos(x) &= \begin{cases} \pi/2 - \arccos(\sqrt{1 - x^2}), & x \in (0, 1) \\ \pi/2 + \arccos(\sqrt{1 - x^2}), & x \in (-1, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

5.1 Esempi

- Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\alpha x^\alpha) + x}{x^2}, \quad x > 0$$

si estende per continuità.

Svolgimento. L'unico punto in cui si potrebbe estendere la funzione risulta $x = 0$. La funzione si estende per continuità in 0 se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$. Si osservi che per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f(x) = \frac{\sin(\alpha x^\alpha) + x}{x} = \frac{\alpha x^\alpha + o(x^\alpha) + x}{x}$$

Per capire il limite dobbiamo confrontare l'esponente delle potenze a numeratore. Per $0 < \alpha < 1$ si ha

$$f(x) = \frac{\alpha x^\alpha + o(x^\alpha)}{x} = \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}}(1 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Per $\alpha = 1$ si ha

$$f(x) = \frac{2x + o(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2$$

Per $\alpha > 1$ si ha

$$f(x) = \frac{x + o(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

In conclusione $f(x)$ si può estendere per continuità in 0 per $\alpha \geq 1$.

- Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) := (e^x - e)(\ln(x))^{1/3}, \quad x > 0$$

Svolgimento. La funzione è continua in tutto il dominio di definizione, $(0, +\infty)$, in quanto prodotto e composizione di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità, l'unico problema è la presenza di una radice cubica funzione che risulta non derivabile in 0. Quindi l'unico punto "critico" per quanto riguarda la derivabilità è $x = 1$, in quanto l'argomento della radice, ossia $\ln(x)$ si annulla. Quindi per $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ la funzione risulta derivabile

$$f'(x) = e^x (\ln(x))^{1/3} + \frac{1}{3x \ln(x)^{2/3}} (e^x - e), \quad x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$$

Per vedere se f è derivabile in $x = 1$ studiamo il limite del rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{(e^x - e)(\ln(x))^{1/3}}{x - 1} = \frac{e(e^{x-1} - 1)(\ln(1 + (x - 1)))^{1/3}}{x - 1} \\ &= \frac{e(x - 1)(1 + o(1))((x - 1)(1 + o(1)))^{1/3}}{x - 1} = e(x - 1)^{1/3}(1 + o(1)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi f è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = 0$.

- *Studiare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione risulta simultaneamente continua e derivabile*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(e^x+2)^{1/2}(\cos(x)-x \ln(1+x))}{a+bx}, & x > 0 \\ e^x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione è formata da un innesto di due funzioni. Tutte e due le funzioni sono continue e derivabili nelle regioni in cui sono definite. Quindi l'unico punto in cui bisogna verificare la continuità e derivabilità è l'origine. Si osservi che $f(0) = a$ e che, banalmente, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + bx) = 0$. Quindi affinché la funzione risulti continua dobbiamo imporre che $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{(e^x+2)^{1/2}(\cos(x)-x \ln(1+x))-1}{e^x-1} &= \frac{\sqrt{3} \left(-\frac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2) \right)}{x(1+o(1))} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1+o(1)) \rightarrow 0 = a \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq 0$ la funzione è derivabile. Per determinare b in modo che f sia derivabile, imponiamo che derivata destra e sinistra siano uguali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx}{x} = b = f'_-(0)$$

mentre per $x \rightarrow 0^+$, sfruttando l'approssimazione fatta prima, si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(e^x+2)^{1/2}(\cos(x)-x \ln(1+x))}{x(e^x-1)} = -\frac{3\sqrt{3}x}{2x}(1+o(1)) \rightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2} = f'_+(0)$$

Quindi f è derivabile in 0 se

$$b = f'_-(0) = f'_+(0) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \iff b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

In conclusione f è derivabile in 0 se $a = 0$ e $b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

- *Studiare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione risulta simultaneamente continua e derivabile*

$$f(x) := \begin{cases} \ln(e^x - 1)x^2 & x > 0 \\ a + bx, & x \leq 0 \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione è formata da un innesto di due funzioni. Tutte e due le funzioni sono continue e derivabili nelle regioni in cui sono definite. Quindi l'unico punto in cui bisogna verificare la continuità e derivabilità è l'origine. Si osservi che $f(0) = a$

e che, banalmente, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + bx) = 0$. Quindi affinché la funzione risulti continua dobbiamo imporre che $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\ln(e^x - 1)x^2 = \ln(x + o(x))x^2 = \ln(x)x^2(1 + o(1)) \rightarrow 0^- \Rightarrow a = 0$$

dove $\ln(x)x^2 \rightarrow 0^-$ per il confronto potenze logaritmo. Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq 0$ la funzione è derivabile. Per determinare b in modo che f sia derivabile, imponiamo che derivata destra e sinistra siano uguali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx}{x} = b = f'_-(0)$$

mentre per $x \rightarrow 0^+$, sfruttando l'approssimazione fatta prima, si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(x)x^2(1 + o(1))}{x} = \ln(x)x(1 + o(1)) \rightarrow 0^- = f'_+(0)$$

Quindi f è derivabile in 0 se

$$b = f'_-(0) = f'_+(0) = 0 \iff b = 0$$

• *Studiare per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ la seguente funzione risulta simultaneamente continua, derivabile e strettamente crescente*

$$f(x) := \begin{cases} \ln(1 + 2 \arctan(x)) & x > 0 \\ a + bx + cx^2, & x \leq 0 \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione è formata da un innesto di due funzioni. Tutte e due le funzioni sono continue e derivabili nelle regioni in cui sono definite. Quindi l'unico punto in cui bisogna verificare la continuità e derivabilità è l'origine. Si osservi che $f(0) = a$ e che, banalmente, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + bx) = 0$. Quindi affinché la funzione risulti continua dobbiamo imporre che $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\ln(1 + 2 \arctan(x)) = \ln(1 + 2x + o(x)) = 2x(1 + o(1)) \rightarrow 0 \Rightarrow a = 0$$

Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq 0$ la funzione è derivabile. Per determinare b in modo che f sia derivabile, imponiamo che derivata destra e sinistra siano uguali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx + cx^2}{x} = b = f'_-(0)$$

mentre per $x \rightarrow 0^+$, sfruttando l'approssimazione fatta prima, si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x(1 + o(1))}{x} \rightarrow 2 = f'_+(0)$$

Quindi f è derivabile in 0 se

$$b = f'_-(0) = f'_+(0) = 2 \iff b = 2$$

Infine per quanto riguarda l'ultima condizione osserviamo che per $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{(1 + 2 \arctan(x))(1 + x^2)} > 0$$

Quindi dobbiamo imporre che la derivata prima risulti > 0 anche per $x < 0$:

$$f'(x) = 2 + 2cx > 0 \iff cx > -1, x < 0$$

e questo è verificato se $c < 0$. Quindi la soluzione cercata è

$$a = 0, \quad b = 2, \quad c < 0 .$$