Successioni

1. Provare che le seguenti disuguaglianze sono verificate definitivamente

   (a) $n^2 + 2n > 10n$

   (b) $\sqrt{3n^2 + 100} < 2n - 10$

   (c) $\sqrt{16n^2 - 100} > \pi n + 100$

2. Stabilire se esistono i limiti delle seguenti successioni :

   (a) $x_n = \frac{(-1)^n (n+1)! + 56 \cdot 5^n}{n! \cdot n}$

   (b) $x_n = \frac{15 \cdot n^2 + 5 \cdot 3^n}{(-1)^n 6^n - n^6}$

3. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti sucessioni e, nel caso di successione infinite o inifinitesime, determinarne, se esiste, l'ordine.

   (a) $\sqrt{n^3 + 8^2} \cdot \frac{6n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n(n+8)}$; $\frac{\left(2n^5 3^n + 5n^{10}\right)^2}{\sqrt{81^n + 5n^6}}$;

   (b) $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^2$; $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - n^2$;

   (c) $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - 2n^2$; $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^2$;

   (d) $\frac{(n+1)^n\, n^2 + (n+3)!\, n^2}{n^n + 6} \cdot \left(\sqrt{9n^8 + n^2} - 3n^4\right)$;

   (e) $\frac{n^{2n}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)}{(n+1)^n + 2^n n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n}$; $\frac{\sqrt{n^{16} + 2n^6 + n^4}}{n^2} - \frac{n^4+1}{n^2}$;

   (f) $n^6 \cdot \left(\sqrt{n^{12} + 2n^2 + 1} - n^2\left(n^4 + 1\right)\right)$;

   (g) $\frac{\ln(n^n) - n^2 + \ln(n!) - n^3 \ln(n)}{\ln(n^3) + n^{-3} - \ln(n)} \cdot \left(4n^{-3} + 5^{-n}\right)$;

   (h) $\frac{(n+2)^5 - (n-2)^5}{4n^4 + \sqrt{n} n^2}$;

   (i) $\left((-1)^n n^2 + n\right)\left(4n^{-3} + 5^{-n} + (-1)^n\, 3n^2\right)$;

4. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti sucessioni. Se sono infinite o infinitesime calcolarne, se esiste, l'ordine. Se il limite è finito determinare se il limite ̀raggiunto per eccesso o per difetto.

   (a) $\left(\frac{n! + 100^n + n^{1000}}{(n-1)! + 6 + 8^{-n}}\right) \cdot \frac{2}{4n}$

   (b) $\left(\frac{n! - 4n^4}{2^n}\right) \cdot \left((n+1)!\right)^{-1}$

   (c) $\left(\frac{(n+1)! - 4n^2 - 2}{(3/2)^n - 6n^8}\right) \cdot \left(\frac{-2^n + n^{100}}{2 \cdot n! + 5n}\right)$

   (d) $\left((n!)^{-1} - 2n^{-4} + n^{-n}\right) \cdot \left(3n^4 + 5\right) \cdot \left(n^{-2} + 5n^{-1/2} + 8\right)$

   (e) $\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (2^{-n} + 8\sqrt{n}\, 8^n + 5)}{2^n 2^{2n}}$

(f) $\left(\frac{n^{n-2}+n}{4\cdot n}-\frac{4\cdot n^2+n^{n-1}}{4\cdot n^2}\right)$

(g) $\frac{n^{-4}-5\,n^{-6}}{6n^{-6}+2n^{-8}}-\frac{n^2}{6}$

(h) $\left(\frac{(n+2)!-4n^2-2}{n^2 2^n-6n^8}\right)\cdot\left(\frac{-2^n+n^{100}}{2\cdot n!+5n}\right)$

(i) $\left(\frac{2\cdot n!-4\cdot 3^n}{3\cdot n^n+18\cdot n^2}\right)\cdot\left(\frac{-(n+1)\cdot n^n+\cdot(n+1)!}{-2\cdot(n+1)!+3}\right)$

(j) $\left(\frac{4^n-3^n\cdot n^2}{3\cdot n^{-2}+18\cdot(n!)^{-1}}\right)\cdot\left(\frac{4^{-n}-5\cdot(n!)^{-1}}{5\cdot 3^n+26\cdot 2^n}\right)\cdot\frac{3^n}{2\cdot n^2}$

(k) $\left(\frac{n^{n-2}+n}{4\cdot n+\sqrt{n}}-\frac{4\cdot n^2+n^{n-1}}{4\cdot n^2}\right)$

(l) $\frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+5}-(n+6)}{-n+\sin(n)+\ln(n^{\sqrt{n}})}$

(m) $\frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+5}-(2n+6)}{-n+\sin(n)}$

(n) $\frac{n^2+3^{-n}+6}{(-1)^n\,n+\sqrt{n}}$

(o) $(\cos(1/n))^{1/n}-\cos(1/n^2))\cdot\frac{((n+4)!+100^n)n^n}{(n+1)^{n+1}n!}$

(p) $\left[\left(1+\frac{1}{(n-2)!}\right)^{1/3}-e^{n^{-n}}\right]\cdot\frac{n!+(n-1)!\ln(n)}{n^2e^{1/n}+n}$

(q) $\frac{\ln(n!)}{n}$

5. Calcolare il limite per $n\to\infty$ delle seguenti successioni:

(a) $\frac{4^n\,n^2}{6^n}$; $\frac{(n-10)!}{100^n}$; $\frac{(n+100)!}{n^{(n-10)}}$

(b) $\frac{(n-4)!}{(7^n)^{300}}$; $\frac{n^n}{(2n)!}$; $\frac{(2n)!}{3^n\,n^n}$

(c) $\frac{n!\,4^n}{n^n}$; $\frac{(n+6)!\,2^n}{n^n}$; $\frac{(n-3)!}{n^{100}}\left(\frac{1}{100}\right)^n$

(d) $\frac{(n!)^2}{n^n}$; $\frac{n^n}{(2^n)^n}$; $\frac{(2n)!}{(2^{n^2})}$

6. Disporre in ordine di infinito/infinitesimo crescente le seguenti successioni:

(a) $n^4\,5^n$, $n^{-3}6^n$, $\frac{n!}{(n-5)!}$.

(b) $(2^n)^2$, 2^{n^2} , $\left(\frac{(2n)!}{(2n-1)!}\right)^n$.

(c) 2^{-n} , $(\frac{2}{3})^n$, $\frac{n^5}{3^n}$.

(d) $(\sqrt{4n^4+n+2}-2n^2)$, $(\log_{10}(n))^{-3}+5n^{-2}$, $(-1)^n\,\log_{10}(n)\,n^{-2}$

(e) $2^{n\arctan(n)}$, $n^{\ln(n)}$, $\ln^n(n)$.

7. Trovare sup/max e inf/min dei seguenti insiemi:

(a) $\left\{\frac{n-1}{n^2-4}\mid n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}\right\}$

(b) $\left\{\sqrt{1-\frac{1}{n}}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

(c) $\left\{\frac{(-1)^n n-12}{n+6} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(d) $\left\{\frac{n\sin(2/3\pi n)-6}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(e) $\left\{n^{\frac{(-1)^n}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (svolto nell'ultima pagina.)

(f) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1-(-1)^n}{2}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

8. Data la successione
$$x_n = \left(\frac{n^{10}+6}{n!+n^2}\right)^n$$
stabilire quali fra le seguenti successioni è sottosuccesione di x_n:

$a_n = \left(\frac{(3n)^{10}+6}{(3n)!+(3n)^2}\right)^{3n}$

$b_n = \left(\frac{(n+7)^{10}+6}{(n+7)!+(n+7)^2}\right)^{n+7}$

$c_n = \left(\frac{(n-4)^{10}+6}{\frac{(n-2)!}{(n-2)(n-3)}+(n-7)^2}\right)^{n-4}$

$d_n = \left(\frac{(2n)^{10}+8}{(2n)!+4n^2}\right)^{2n}$

$e_n = \left(\frac{(5n)^{10}+6}{(5n)!+30n^2}\right)^{n}$

$f_n = \left(\left(\frac{(3n)^{10}+6}{(3n)!+9n^2}\right)^{n}\right)^3$

9. Utilizzando il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccesioni calcolare i seguenti limiti

(a) $\lim_{n\to\infty}(n^2+7n+5)^{\frac{1}{2n^2+14n+10}}$

(b) $\lim_{n\to\infty}(n+\sin(n))^{-\frac{3}{n+\sin(n)}}$

(c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{4n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

10. Utilizzare il teorema del confronto o il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccesioni per stabilire quali delle succesioni che seguono sono regolari, ossia esiste il limite

(a) $\left(\frac{(-1)^n\, n^2+5}{\sqrt{n}+6}\right)$

(b) $(-1)^n \cdot \left(\frac{n^2+5}{n^3+6}\right)$

(c) $\frac{(-1)^n\, n+\ln(n)}{n+\sqrt[n]{n}}$

(d) $\frac{\sin(n\,\pi/2)\, n^4+n^2}{n^4\ln(n)+n^2}$

(e) $\frac{\sin(n\,\pi/2)\,n^4+n^2}{n^4+n^2}$

(f) $\frac{\sin(n\,\pi/2)\,n^4+4n^4+n^2}{n^4+n^2}$

(g) $\frac{4^{n(-1)^n}+n^3}{n^4+3^n}$

(h) $\frac{4^{n(-1)^n}+n^3}{n^4+5^n}$

(i) $n^{\frac{(-1)^n}{n}}$

11. Determinare punti di accumulazione, punti interni, punti di frontiera e punti isolati dei seguenti insiemi

(a) $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

(c) $\left\{\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

• *Determinare il sup/inf del seguente insieme*

$$E := \left\{ n^{\frac{(-1)^n}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

In questo tipo di esercizi l'idea è di applicare il teorema del limite di successioni monotone. In questo caso, tuttavia, non è evidente la monotonia della successione che definisce E a causa del termine oscillante $(-1)^n$. Per eliminare l'oscillazione l'idea è di dividere la successione $x_n = n^{\frac{(-1)^n}{n}}$ nelle due sottosuccessioni dei pari e dei dispari:

$$p_n = (2n)^{\frac{1}{2n}} \quad , \quad d_n = (2n-1)^{\frac{-1}{2n-1}} = \frac{1}{(2n-1)^{\frac{1}{2n-1}}}$$

Quindi posto

$$E_p := \{p_n\} \quad , \quad E_d := \{d_n\}$$

Il sup e l'inf di E saranno determinati da quelli di E_d ed E_d osservando che valgono le relazioni

$$\sup E = \max\{\sup E_p, \sup E_d\} \quad , \quad \inf E = \min\{\inf E_p, \inf E_d\}$$

Ora si osservi che le successioni

$$(2n)^{\frac{1}{2n}} \quad , \quad (2n-1)^{\frac{1}{2n-1}}$$

sono sottosuccessioni di $n^{1/n}$; sarà quindi sufficiente capire la monotonia di questultima per determinare le altre. Ora

$$n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$$

quindi la monotonia sarà determinata da quella di $\frac{\ln n}{n}$ in quanto la funzione exponenziale è strettamente crescente e non cambia la monotonia della successione. Allora

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n(n+1)}(n\ln(n+1) - (n+1)\ln(n)) = \frac{1}{n(n+1)} \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n}\right)$$

quindi il segno dipende esclusivamente dal logaritmo ed in particolare se il suo argomento è maggiore o minore di 1:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < 1 \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è la successione di Bernoulli che è strettamente crescente e converge ad $e \sim 2,71...$ Quindi la disugguaglianza è verificata per $n = 3$, mentre per

$$n = 1 \Rightarrow 2 > 1 \quad , \quad n = 2 \Rightarrow 9/4 > 2$$

quindi la successioni $n^{1/n}$ è decrescente per $n \geq 3$ mentre decresce per $n = 1, 2$. Di conseguenza la successione

$$p_n = (2n)^{1/(2n)}$$

è descrscente a partire da $n = 2$, mentre la successione

$$d_n = \frac{1}{(2n-1)^{\frac{1}{2n-1}}}$$

è crescente a partire da $n = 2$. Quindi

$$\sup(E_p) = \max\{p_1, p_2\} = \max\{\sqrt{2}, \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$$

$$\inf(E_p) = \min\{\sqrt{2}, \lim_{n\to\infty}(2n)^{1/(2n)} = 1\} = 1$$

Mentre

$$\inf(E_d) = \min\{d_1, d_2\} = \min\{1, 3^{-(1/3)}\} = 3^{-(1/3)}$$

e

$$\sup(E_d) = \min\{d_1 = 1, \lim_{n\to\infty}(2n-1)^{-1/(2n-1)} = 1\} = 1$$

quindi in particolare 1 è $\max E_d$. In conclusione

$$\sup E = \max\{\sup E_p, \sup E_d\} = \max\{\sqrt{2}, 1\} = \sqrt{2}$$

e

$$\inf E = \min\{\inf E_p, \inf E_d\} = \min\{1, 3^{-(1/3)}\} = 3^{-(1/3)}$$

Si noti infine che $\sqrt{2}$ è massimo di E e che $3^{-(1/3)}$ è minimo di E.