

Limiti e forme indeterminate

1. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di X si dice *infinitesima di ordine $r > 0$* se

$$f(x) = |x - x_0|^r (K + o(1)) , \quad K \neq 0 , \quad x \rightarrow x_0$$

ed è detta *infinita di ordine $r > 0$* se

$$f(x) = \frac{1}{|x - x_0|^r} (K + o(1)) , \quad K \neq 0 , \quad x \rightarrow x_0 .$$

Analogamente se X non è superiormente limitato o inferiormente limitato f è detta *infinitesima di ordine $r > 0$* se

$$f(x) = \frac{1}{|x|^r} (K + o(1)) , \quad K \neq 0 , \quad x \rightarrow \infty$$

ed è detta *infinita di ordine $r > 0$* se

$$f(x) = |x|^r (K + o(1)) , \quad K \neq 0 , \quad x \rightarrow \infty .$$

Studiare i seguenti limiti di funzione e, nel caso di infiniti o infinitesimi, stabilirne l'ordine

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x^3 + 8x^{-3}}{x(x - \arctan(x)) - 3x^2}$ [−1/2]
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 5x^3 + 8x^{-3}}{\arctan(x) - 3x^2}$ [+∞, ordine 4]
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5x^4 + 8x^{-3}}{x - 3x^2} - \frac{5}{3}x^2$ [+∞, ordine 1]
- (d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 2x + 5) \ln(6 - x)}{x - 5}$ [−20]
- (e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})}{2n - n^{-1} + 4}$ [−1/4]
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - x^2)(e^x - 1)}{3x^3 + 5x^2}$ [2/5]
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^3 - x^4)(\sin(x) + x^2)}{(3x^3 - 5x) \ln(1 + x)}$ [0, ordine 2]
- (h) Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 2x^{5/2}}{(8x^k + 6x^3) \ln(1 + x)}$$

2. Sia dato il seguente limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

provare

- (a) $\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$.
 (b) Usare la precedente relazione per dimostrare che per ogni $x_0 > 0$ si ha

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 .$$

- (c) Utilizzare il limite notevole del logaritmo e la formula di inversione esponenziale logaritmo per dimostrare il seguente limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(suggerimento: osservare che $x = \ln(1+y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0$. La dimostrazione si trova alla fine di questo foglio di esercizi).

- (d) Provare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 .$$

- (e) Usando l'approssimazione del logaritmo provare che

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

per $x \rightarrow 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Da questa si può dedurre che

$$x^\alpha = x_0^\alpha + \alpha x_0^{\alpha-1}(x - x_0) + o(x - x_0),$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è ben definita x_0^α .

- (f) Provare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sinh(x) = \sinh(x_0) + \cosh(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 .$$

$$\cosh(x) = \cosh(x_0) + \sinh(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 .$$

- (g) Provare che $\tan(x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e utilizzare questa relazione e, come per l'eponenziale, la relazione inversione tra $\tan(x)$ e $\arctan(x)$ per dimostrare che

$$\arctan(x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0 .$$

- (h) Utilizzando il teorema del limite di funzioni composte provare che se

$$f(y) = \sum_{k=0}^n \beta_k (y - y_0)^k + o((y - y_0)^k), \quad x \rightarrow x_0$$

e $g(x) \rightarrow y_0$ per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$ allora

$$f(g(x)) = f(y_0) + \sum_{k=0}^n \beta_k (g(x) - y_0)^k + o((g(x) - y_0)^k), \quad x \rightarrow x_0$$

(La dimostrazione si trova nelle note a fine esercizi.)

(i) Utilizzare la relazione di prima per provare che

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) , \quad x \rightarrow 0$$

e

$$\sin(1/x) = 1/x + o(1/x) , \quad x \rightarrow \infty$$

3. Utilizzando la definizione di $o(x^\alpha)$ provare le seguenti relazioni

(a) $x^2 + o(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

(b) $x + x^2 + o(x^3) + x^2 + o(x^2) = x + x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

(c) $(x + x^2 + o(x^3))(1 + 2x + o(x)) = x + 3x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

(d) $(x^{-1} + x^{-2} + o(x^{-4}))(2 + x^{-3} + x^{-5} + o(x^{-5})) = 2x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-4} + o(x^{-4})$
per $x \rightarrow +\infty$

4. Calcolare i seguenti limiti e nel caso di infiniti o infinitesimi stabilire se esiste un ordine

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^2)(\cos x - 1)}{x(\sqrt[3]{1-x^3}-1)}$ [-9/2]

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos(x) - e^x)}{\arctan(x) - \sin(x^2)}$ [0, ordine 1]

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x+x^4)}{\cos(x^{3/2})-1}$ [-∞, ordine 2]

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log(1-(x-3)^2) + (x-3)^4}{2(x-3)\tan(x-3)}$ [-1/2]

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^2} \ln(\cos(x^{-2}))}{\tan(2x^{-2})}$ [-1/4]

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^2} \ln(\cos(x^{-2}))}{\arctan(2x^{-2}) + e^{-x}}$ [-1/4]

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{-1}{x^2}\right) (\sin(x) + x)$ [0, ordine = 1]

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{-1}{x}\right) (x \sin(x) + x)$ [∅]

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1-x}}{\ln(\sqrt{1+2x^2})}$ [∅]

(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \sqrt[3]{1-x}}{\ln(\sqrt{1+2x^2})}$ [+∞]

(k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \sqrt[3]{1-x}}{\ln(\sqrt{1+2x})}$ [4/3]

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x^2+x^4}-1-3x^3}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}-1}$ [-4]

(m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(2x) - \ln(\sqrt{x} + x^3))}{\sin(x) + \ln(4x + 7x^2)}$ [1/2]

(n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{4x} + x^{10})(1 - \cos(e^{-2x}) + e^{-5x})$ [1/2]

(o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan(x^2) - \pi/2)(\sqrt{x^6+x^2})}{\sqrt{x} \ln(x^6) + 3x}$ [-1/3]

5. Provare le seguenti relazione

- (a) $x^x = 1 + x \ln(x) + o(x \ln(x))$ per $x \rightarrow 0^+$
 (b) $(\cos(x))^{x^{-1}} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ per $x \rightarrow 0^+$

6. Calcolare i seguenti limiti e nel caso di limiti infiniti o infinitesimi stabilire se esiste un ordine

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{e^x - e^2}$ [80e⁻²]
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{4}{x^2})(\sin(2x)^2 + x^2 + \ln(x^5))$ [4]
 (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2 \cosh(x^{-2})} - \sqrt[3]{2}$ [0, ordine 4]
 (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\log(2) - \log(x))^2}{\log(\cosh(x-2))}$ [0, ordine 1]
 (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(e^{x-2} - 1)}{(x-2)(1 - \sqrt[3]{1-(x-2)})}$ [12]
 (f) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x)$ [+∞, ordine 1]
 (g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{\cos(x-2)} - \frac{e^x}{e^2}}{2 \log(x-1)}$ [-1/2]
 (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ [1]
 (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}$ [0, nessun ordine]
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1 + x}{\ln(\cos(x))}$ [+∞, nessun ordine]
 (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{2x-1}}{4x^2}$ [1/2]
 (l) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^{(x-4)} - 1 + x - 4}{x^3 - 64}$ [(ln(4) + 1)/3]
 (m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2x} - 1}{\sqrt{x} - \cos(x-1)}$ [4]
 (n) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} + \arctan(\cos(x)-1)}{\ln(1+x+x^3) - x^2}$ [-∞, ordine 1]
 (o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)^{\arctan(x^{-1})} - 1}{x - \ln(x) + x^2}$ [-π/4]
 (p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\ln(3-x) - \ln(-x))}{\sin(\frac{2}{x})}$ [-3/2]
 (q) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{(x-2)} - \sqrt[3]{3-x}}{\cos(x-2) - e^{(x-2)^3}}$ [-∞, ordine 1]
 (r) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{(x-2)} - \sqrt[3]{3-x}}{\cos(x-2) - e^{(x-2)}}$ [-4/3]
 (s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan(x) - \pi/2 x$ [-1]
 (t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) \ln(1-3x^{-1})}{\sin(x^{-2})}$ [-∞, nessun ordine]
 (u) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(x) - \cos(x) \ln(x^2)}{\cos(x) - \sqrt{1-3x}}$ [0⁻, nessun ordine]
 (v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2+x^4) - e^{-1/x} x^{-3}}{\cos(x^{3/2}) - 1}$ [-∞, ordine 1]

7. Dire quali dei seguenti limiti esiste. (Applicare il teorema ponte o il teorema che lega l'esistenza del limite a quella dei limiti destro e sinistro o, il teorema del confronto)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ [$\not\exists$]
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2)$ [$\not\exists$]
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tan(x))^2$ [$\not\exists$]
 (d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{\sin(x-3)}$ [$\not\exists$]
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2(x+5)}}{\arctan(x)}$ [$\not\exists$]
 (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2) e^{-x}$ [0]
 (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (\sin(x))^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ [1]
 (h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{\sin(x-3)} e^{(x-3)}$ [$\not\exists$]
 (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2(x+5)}}{\arctan(x)} \sin(x)$ [0]
 (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2) + x$ [$+\infty$]
 (k) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{(\sin(x))^{-1}}$ [1]
 (l) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{(\sin(x^3))^{-1}}$ [$\not\exists$]
 (m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(1/x) + x^2)$ [$\not\exists$]
 (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \sin(1/x) + x^2)$ [0, ordine 1]

8. Perché non si può applicare il teorema del confronto per studiare l'esistenza del limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan(x) x^{-1}$? Tale limite esiste? (Considerare le successioni $x_n = 2n\pi$ e $y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2} + 2n\pi$ per $n \in \mathbb{N}$).

9. Studiare al variare del parametro α i seguenti limiti

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(x^3-1)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} 0 & \alpha < 1 \\ 1/6 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{bmatrix}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\alpha x} - 1)x \sin(x^{-1})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -1 & \alpha < 0 \end{bmatrix}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) + x^2}{\ln(\sqrt{x+1})}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} 0 & \alpha > 1 \\ 2 & \alpha = 1 \\ +\infty & 0 \leq \alpha < 1 \\ \not\exists & \alpha < 0 \end{bmatrix}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(2 \arctan(x^\alpha) - \pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} 0 & \alpha > 1 \\ -2 & \alpha = 1 \\ -\infty & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \alpha \leq 0 \end{bmatrix}$

10. Studiare al variare del parametro α la continuità delle seguenti funzioni

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+2x^\alpha}-\cos(x)}{x+x^\alpha}, & x > 0, \\ 2/3 & x = 0, \end{cases} \quad \text{per } \alpha > 0$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^{(\alpha-1)})}{\alpha x}, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ \frac{\arctan(1/x)}{-\pi}, & x < 0. \end{cases} \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{R}$$

11. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni elencate si possono estendere per continuità

$$(a) \quad f(x) = \frac{\ln(1+x^{(\alpha-1)})}{\alpha x}, \quad x > 0.$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{\sin(\alpha x^\alpha)+x}{x^2}, \quad x > 0.$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{(\ln(1+x))^\alpha \arctan(\alpha x^{-2\alpha})}{x^2}, \quad x > 0$$

Note

Infiniti e infinitesimi di ordine superiore

Date due funzioni $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X .

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \rightarrow \infty$ ed $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$, allora g è detta un infinito di ordine superiore di f se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$$

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow 0$, $g(x)$ definitivamente diversa da 0 e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$, allora f è detta un infinitesimo di ordine superiore di g se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$$

In entrambe i casi la notazione è $f(x) = o(g(x))$. Si noti che

$$f(x) = o(g(x)) \iff f(x) = g(x) \cdot o(1)$$

Infatti

$$f(x) = o(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \iff \frac{f(x)}{g(x)} = o(1) \iff f(x) = g(x) \cdot o(1)$$

Il limite notevole dell'esponenziale.

Si considerino le seguenti funzioni

$$f(y) := \frac{y}{\ln(y+1)}, \quad y > -1 \quad ; \quad g(x) := e^x - 1$$

Dal limite notevole del logaritmo si ha che

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1,$$

e per la continuità della funzione esponenziale $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$. Per il teorema del limite di funzioni composte si ha

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(e^x - 1 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Relazioni di approssimazione

Dai limiti notevoli introdotti a lezione ed il teorema limite di funzioni composte possiamo dedurre le seguenti formule di approssimazione.

Sia f una funzione che definitivamente in $y_0 \in \mathbb{R}$ soddisfa la relazione

$$f(y) = \sum_{k=0}^n a_k (y - y_0)^k + o(y - y_0)^n$$

e sia $g(x)$ una funzione tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 ,$$

e $g(x) \neq y_0$ definitivamente in x_0 . Allora

$$(f \circ g)(x) = \sum_{k=0}^n a_k (g(x) - y_0)^k + o(g(x) - y_0)^n$$

Si osservi infatti che $f(y) = \sum_{k=0}^n a_k (y - y_0)^k + o(y - y_0)^n$ equivale a dire che la funzione

$$F(y) := \frac{f(y) - \sum_{k=0}^n a_k (y - y_0)^k}{(y - y_0)^n} , \quad y \neq y_0$$

ha limite: $\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = 0$. Dal teorema del limite di funzione composte si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (F \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - \sum_{k=0}^n a_k (g(x) - y_0)^k}{(g(x) - y_0)^n} = 0$$

che equivale

$$(f \circ g)(x) = \sum_{k=0}^n a_k (g(x) - y_0)^k + o(g(x) - y_0)^n .$$

Utilizzando la relazione di sopra e le approssimazioni ottenute dai limiti notevoli se $g(x)$ è una funzione tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 ,$$

e $g(x) \neq 0$ definitivamente in x_0 si ha

$e^{g(x)}$	$=$	$1 + g(x) + o(g(x))$	$x \rightarrow x_0$
$\ln(1 + g(x))$	$=$	$g(x) + o(g(x))$	$x \rightarrow x_0$
$\sin(g(x))$	$=$	$g(x) + o(g(x))$	$x \rightarrow x_0$
$\cos(g(x))$	$=$	$1 - \frac{1}{2}(g(x))^2 + o(g(x)^2)$	$x \rightarrow x_0$
$\tan(g(x))$	$=$	$g(x) + o(g(x))$	$x \rightarrow x_0$
$\arctan(g(x))$	$=$	$g(x) + o(g(x))$	$x \rightarrow x_0$
$(1 + g(x))^\alpha$	$=$	$1 + \alpha g(x) + o(g(x)) \quad \alpha \neq 0, 1$	$x \rightarrow x_0$
$\sinh(g(x))$	$=$	$g(x) + o(g(x))$	$x \rightarrow x_0$
$\cosh(g(x))$	$=$	$1 + \frac{1}{2}(g(x))^2 + o(g(x)^2)$	$x \rightarrow x_0$
$\tanh(g(x))$	$=$	$g(x) + o(g(x))$	$x \rightarrow x_0$.