Composizione, domini e inversione di funzioni

1. Risolvere le seguenti disequazioni

   (a) $\frac{x+5}{x-6} < x+3$

   (b) $\frac{x^2-3x+2}{x-1} \leq (2-x)$

   (c) $\frac{\sqrt{x}-4}{x-1} \geq 2$

   (d) $\frac{x+2}{x-2} < |x+5|$

   (e) Trovare max/min e sup/inf degli insiemi definiti dalle disequazioni 2a,2b e 2c.

2. Trovare max/min e sup/inf dei seguenti insiemi

   (a) $E := \{\frac{n-1}{n+4} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $E := \{\frac{2n+1}{n-1} \ , \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2\}$

   (c) $E := \{\frac{n+(-1)^n}{n-1} \ , \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2\}$

3. Date le funzioni

$$f(x) = \frac{x^2-8x+15}{x-6} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x^2-3x}$$

   calcolarne il dominio. Inoltre dati gli insiemi

$$D_1 = [0, +\infty) \ , \quad D_2 = [1, 4] \ , \quad D_3 = [-2, 2]$$

   calcolare, le seguenti controimmagini (osservare che la controimmagine dell'unione di insiemi è uguale alla unione delle controimmagini):

   (a) $f^{-1}(D_1)$, $f^{-1}(D_2)$, $f^{-1}(D_3)$, $f^{-1}(D_2 \cup D_3)$,

   (b) $g^{-1}(D_1)$, $g^{-1}(D_2)$, $g^{-1}(D_3)$, $g^{-1}(D_1 \cup D_2)$.

4. Date le funzioni

$$f(x) = \sqrt{x} \ , \quad h(x) = x^2 + x - 6 \ , \quad g(x) = \log_{10}(x) \ , \quad m(x) = |x| \ , \quad l(x) = x^3 + x \ .$$

   Calcolare le seguenti composizioni e i corrispodenti domini

   (a) $f \circ h \quad , \quad h \circ f$

   (b) $g \circ h \quad , \quad h \circ g$

   (c) $h \circ m \quad , \quad m \circ h$

   (d) $g \circ l \quad , \quad l \circ g$

(e) $g \circ h \circ f \quad , \quad f \circ h \circ g\ .$

5. Stabilire, dopo aver tracciato il grafico, quali delle seguenti funzioni è invertibile

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ -x+4 & x \in [1,2] \end{cases}$$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2} & x \in [1,2] \end{cases}$$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1) \\ \sqrt{x} & x \in [1,2] \end{cases}$$

   (d)
   $$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ -x+3 & x \in (1,2] \end{cases}$$

6. Verificare che le seguenti coppie di funzioni sono una l'inversa dell'altra

   (a) $f(x) = \frac{x^3+4}{5}$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5x-4}$
   (b) $f(x) = \frac{1}{x+2} \restriction (-2,+\infty)$ e $f^{-1}(x) = \frac{1-2y}{y} \restriction (0,+\infty)$
   (c) $f(x) = (x-1)^2 \restriction [1,+\infty)$ e $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x} \restriction [0,+\infty)$
   (d) $f(x) = (x-1)^2 \restriction (-\infty,1]$ e $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x} \restriction [0,+\infty)$
   (e) $f(x) = x^2 - 6x + 8 \restriction [3,+\infty)$ e $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{1+x} \restriction [-1,+\infty)$

7. Risolvere le seguenti disequazioni

   (a) $x^2 + |x| - 2 > 2$
   (b) $1 < x^2 + |x| - 2 < 2$
   (c) $\sqrt{-x^2+4} < x+5$
   (d) $1 < \log_2(x^2 - 6x + 5) \leq 2$
   (e) $1 < \log_{1/2}(x^2 - 6x + 5) \leq 2$
   (f) $3 < e^{2x} - e^x - 12 < 10$
   (g) $-2 < \ln(|x| - 5) < 4$
   (h) $x^4 + 4x^2 - 5 > 0$
   (i) $-x^4 + 4x^2 - 5 > 1$
   (j) $0 < \log_3^2(x) + 4\log_3(x) - 3 < 2$

8. Studiare il dominio di definizione, provare (usando la monotonia) l'invertilità e calcolare l'inversa delle seguenti funzioni

   (a) $\log_3(1+x^3)$

   (b) $\sqrt{4+2^x}$

   (c) $\sqrt[3]{6+\log_5(x)}$

9. Trovare gli insiemi in cui le seguenti funzioni sono invertibili e calcolarne le inverse

   (a) $\cosh(x)$

   (b) $\sqrt{e^{x^2}+1}$

   (c) $\log_2(x^2-3x+2)$

10. Utillizzando le proprietà del logaritmo e dell'esponenziale provare le seguenti identità

    (a) $\frac{4\log_2(4)}{\log_3(27)+\log_3(9)} = \frac{8}{5}$

    (b) $\frac{\log_2(16)-\log_2(4)}{\log_6(2^3\,3^3)} = \frac{2}{3}$

    (c) $\log_7(5)\,\log_5(7^4\,7^6) = 10$

    (d) $-\log_5((25^6)^{10}) + \log_5(5^4\cdot 25^3) = -110$

    (e) $\frac{\log_2(3)\,(\log_3(16)-\log_3 4)}{\log_6(2^3\,3^3)} = \frac{2}{3}$

11. Calcolare le immagini delle funzioni nei corrispondenti domini o negli insiemi indicati (Vedere esempio a fine foglio degli esercizi)

    (a) x^2-4

    (b) x^2-4 per $x\in[-2,4)$

    (c) $\frac{x-1}{x+5}$

    (d) $\ln(x+6)$ per $x\in[-2,0]$

    (e) $2^{x^2}-8$ per $x\in[0,+\infty)$

Esempio di calcolo dell'immagine. Sia data la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

calcolare l'immagine della funzione e l'immagine dell'intervallo $[0, 2]$.
Svolgimento. Rispondiamo alla prima domanda. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ calcolare la sua immagine equivale a risolvere il seguente problema: trovare $y \in \mathbb{R}$ che risolvono la seguente equazione

$$y = x^2 - 2x - 3 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Questa equazione è equivalente a

$$y = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

e questa è equivalente alla seguente equazione

$$x - 1 = \pm\sqrt{y+4} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \ y \geq 4$$

Quindi vediamo che l'equazione di partenza è risolta per tutti gli $y \geq -4$. Quindi $[-4, +\infty)$ è l'immagine della funzione. Nella seconda domanda si impone una restrizione sui possibili valori della x. Quindi bigogna imporre tale restrizione sull'ultima equazione. Ossia osservando che $x = 1 + \pm\sqrt{y+4}$ abbiamo un sistema di due disequazioni

$$0 \leq 1 + \sqrt{y+4} \leq 2 \quad , \quad 0 \leq 1 - \sqrt{y+4} \leq 2 \quad , \quad -4 \leq y \ .$$

La prima si risolve facilmente osservado che che è equivalente a

$$-1 \leq \sqrt{y+4} \leq 1 \quad , \quad -4 \leq y \ .$$

ma la radice ha immagine positiva quindi la prima disugualgianze è verificata. Per la seconda osservando che abbiamo a che fare con quantità positive e che x^2 èstrettamente crescente intale intervallo si ha

$$\sqrt{y+4} \leq 1 \quad , \quad -4 \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y + 4 \leq 1 \ , -4 \leq y$$

quindi la prima disequanzione ha soluzione in $y \in [-4, -3]$. Per la seconda aggiungendo -1 a tutti i membri e combiando di segno porta a

$$1 \geq \sqrt{y+4} \geq -1 \quad , \quad -4 \leq y \ .$$

La seconda disuguaglianza è sempre verificata. La prima procedendo come nel caso precedente porta a

$$1 \geq y + 4 \quad , \quad -4 \leq y$$

quindi si ottiene lo stesso risultato di prima: $y \in [-4, -3]$. Quindi $f([0, 2]] = [-4, 3]$

Esempio calcolo dell'inversa. Studiare l'invertibilità e calcolarne, dove definite, le inverse della funzione

$$f(x) = \arctan(x^2 - 6x + 8)$$

Svolgimento Vediamo dove la funzione è invertibile. Si osservi che completando il quadrato del polinomio di secondo grado si ha

$$f(x) = \arctan(^2 - 6x + 8) = \arctan(x^2 - 6x + 9 - 1) = \arctan((x-3)^2 - 1)$$

da cui segue, ricordando che $\arctan(x)$ è strettamente crescente, che

$$f_+ : 0 f \restriction [3, +\infty) \ , \ \textit{strettamente crescente} \ ; \ f_- := f \restriction (-\infty, 3] \ , \ \textit{strettamente decrescente}$$

quindi è invertibile su ognuno di questi due intervalli.

Calcolare l'inversa equivale ad esplicitare i punti del dominio x come funzione dei punti dell'immagine della funzione; ossia equivale a risolvere un equazione del tipo

$$y = \arctan(x^2 - 6x + 8) = \arctan((x-3)^2 - 1)$$

cercando se possibile di esplicitare la x come funzione della y. Allora osserviamo

$$y = \arctan((x-3)^2 - 1) \iff \begin{cases} \tan(y) = (x-3)^2 - 1 \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \tan(y) + 1 = (x-3)^2 \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{\tan(y) + 1} \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \ , \ \tan(y) \geq -1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{\tan(y) + 1} \\ y \in (-\pi/4, \pi/2) \end{cases}$$

Ora l'indeterminazione del $\pm$ è legata al fatto che la funzione di artenza non è invertibile su tutto il suo dominio ma solo su due inervalli di $\mathbb{R}$. Si vede a questo punto facilmente che

$$f_+ = f \restriction [3, +\infty) \ , \ (f_+)^{-1}(y) = 3 + \sqrt{\tan(y) + 1} \ y \in (-\pi/4, \pi/2)$$
$$f_- = f \restriction (-\infty, 3] \ , \ (f_-)^{-1}(y) = 3 - \sqrt{\tan(y) + 1} \ y \in (-\pi/4, \pi/2)$$

in quanto nel primo caso l'immagine di $(f_+)^{-1}$ è $[3, +\infty)$ mentre nel secondo caso l'immagine di $(f_-)^{-1}$ è $(-\infty, 3]$