Induzione matematica, disequazioni e numeri reali

1. Usando il principio di induzione dimostrare che sono vere le seguenti relazioni

   (a) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

   $$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} \cdot b^k \ , \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

   (b) Provare che per $a \in (0,1)$ vale la disuguaglianza

   $$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

   (c) Trovare una formula per $\sum_{k=1}^{n} k^2$ e provarla per induzione. *Suggerimento*: le sommatorie possono essere viste come degli integrali discreti e l'integrale indefinito di x^2 è, a meno dicostanti, x^3. Da questa osservazione, ugugliare $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ad un generico polinomio di ordine 3 nella variabile n, determinarne le costanti e verificarne la correttezza di quanto ottenuto per induzione.

   (d) Provare che la disuguaglianza di Bernoulli vale in senso stretto per $n \geq 2$ e $h \geq -1$ e $h \neq 0$, ossia

   $$(1+h)^n > (1+nh) \ , \qquad \forall n \geq 2, \ h \geq -1, \ h \neq 0 \ .$$

2. **Binomio di Newton.** Il *fattoriale* di un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale $n!$ definito dalle relazione

   $$0! = 1 \quad , \quad n! := n\,(n-1)! \ .$$

   Usando il fattoriale possiamo definire i *coefficienti binomiali*: per ogni coppia di naturali k, n tale che $k \leq n$ sia

   $$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

   Si provi che valgono le seguenti relazioni

   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

   (a) Usando la formula del binomio di Newton provare che per il trinomio vale la seguente relazione

   $$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} \left(\frac{n!}{k!m!(n-m-k)!} \right) a^m b^k c^{n-m-k}$$

   (b) Utilizzare la formula del binomio di Newton per dimostrare che la cardinalità dell'insieme delle parti $P(X)$ di un insieme di n elementi è pari a 2^n. (*Suggerimento: pensare a quanti sono i sottoinsiemi di X con k-elementi*).

3. Provare che sono vere le seguenti affermazioni:

   (a) se $p \in \mathbb{Q}$ e $r \in Irr(\mathbb{R})$ allora $p + r \in Irr(\mathbb{R})$.

   (b) se $p \in \mathbb{Q}$ e $p \neq 0$ ed $r \in Irr(\mathbb{R})$ allora $p \cdot r \in Irr(\mathbb{R})$.

   (c) Dire se è vera la seguente affermazione: *la somma ed il prodotto di numeri irrazionali è un numero irrazionale.* Nel caso in cui non sia vera fare degli esempi.

4. Provare che i seguenti numeri sono irrazionali:

   (a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$;

   (b) $2+\sqrt{2}$, $4\cdot\sqrt{2}$, $\frac{3}{5}+8\sqrt{3}$.

5. Provare che se $k \in \mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = k \ .$$
(Suggerimento: procedere come nella dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$; e usare la fattorizzazione in numeri primi dei naturali).

6. Sfruttando il predente esercizio provare che che se $k \in \mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che
$$\left(\frac{m}{n}\right)^\ell = k \ .$$
per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ con $\ell \geq 2$.

7. Dire se le seguenti disuguaglianze sono vere:
$$\sqrt{2} > \frac{11}{8} \quad , \quad \sqrt{\frac{3}{5}} < \frac{4}{5} \quad , \quad \sqrt{\frac{6}{9}} > \frac{7}{9} \quad , \quad \frac{-2+\sqrt{17}}{2} > \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{2-\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{7} \quad , \quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{\pi}}{4} > \frac{3}{2}$$

8. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente da numeri maggiori o uguali a zero.

   (a) Si provi che l'allineamento decimale a definito dalle relazioni
$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \in Min(A) \quad , \quad a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} \notin Min(A) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$
   è l'estremo inferiore di A.

   (b) Si applichi la definizione di a all'insieme
$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}$$
   per calcolare, a meno di quattro cifre decimali $\sqrt{2}$.

9. Calcolare sup / inf , max / min degli insiemi

   (a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{11x-42}{x-6} > (x-6)\right\} \ \cup \ \{-1, 3, 4, 6\}$

   (b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{3}{x-5} \leq 1\right\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{3}{x-5} \leq 1\right\} \ \cup \ \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{6}{x-6} < -1\right\} \ \cup \ \mathbb{N}$