Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2023 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} - n + 2a\log\left(\sqrt{n-1}\right) - a}{n\Big(\log\sqrt[n]{n}\Big)^2}.$$

[$a = -3, 3, -2, 2$]

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $x \to 0^+$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \quad \log(1+x) = x + o(x), \quad e^x = 1 + x + o(x).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} &= n\sqrt{\Big(1+\frac{2a}{n}\Big)\Big(1-\frac{2a\log n}{n}\Big)} = n\sqrt{1-\frac{2a\log n}{n}+\frac{2a}{n}-\frac{4a^2\log n}{n^2}} \\ &= n\Big(1-\frac{a\log n}{n}+\frac{a}{n}-\frac{a^2\log^2 n}{2n^2}+o\Big(\frac{\log^2 n}{n^2}\Big)\Big) \\ &= n - a\log n + a - \frac{a^2\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big),\end{aligned}$$

$$2a\log(\sqrt{n-1}) = a\log(n-1) = a\log n + a\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = a\log n - \frac{a}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

da cui segue

$$\sqrt{(n+2a)(n-2a\log n)} - n + 2a\log(\sqrt{n-1}) - a = -\frac{a^2\log^2 n}{2n} + o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big).$$

D'altra parte

$$n\Big(\log\sqrt[n]{n}\Big)^2 = \frac{\log^2 n}{n}.$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{a^2}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = b\arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (2, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Il dominio è

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0,\ -1 \leq \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1\right\}.$$

Poiché allora il discriminante del polinomio quadratico di x^2, $2x^4 - 2ax^2 + a^2$, è $-a^2 < 0$, si ha $2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \geq -1$$

è banalmente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq \sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2ax^2 + a^2 = (x^2 - a)^2 \geq 0$$

è anch'essa verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, con l'uguaglianza valida per $x = \pm\sqrt{a}$. Dunque $D = \mathbb{R}$. Inoltre chiaramente la funzione data è pari, e basta dunque studiarla per $x \geq 0$.
Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} b\arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}\right) = b\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}b,$$

e dunque la retta di equazione $y = b\pi/4$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, mentre ovviamente il grafico della funzione non possiede asintoti verticali né obliqui.
La derivata è, per $x \neq \pm\sqrt{a}$ (punti in cui l'argomento dell'arcoseno vale 1, e non è quindi garantita la derivabilità di f),

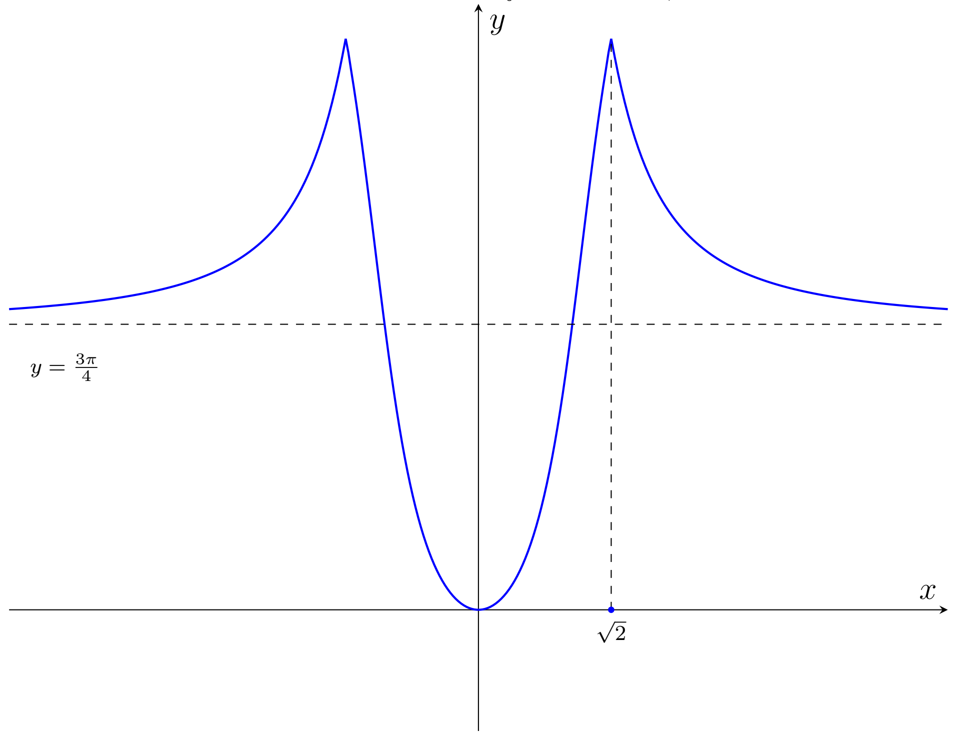
$$\begin{aligned}
f'(x) &= b\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}}\frac{2x\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} - x^2\frac{4x^3 - 2ax}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\
&= b\frac{1}{\sqrt{x^4 - 2ax^2 + a^2}}\frac{2x(2x^4 - 2ax^2 + a^2) - 4x^5 + 2ax^3}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\
&= 2ab\frac{x(a - x^2)}{|x^2 - a|(2x^4 - 2ax^2 + a^2)},
\end{aligned}$$

e inoltre, essendo $\frac{a - x^2}{|x^2 - a|}$ l'opposto del segno di $x^2 - a$, si ha

$$\lim_{x\to\sqrt{a}^{\pm}} f'(x) = \mp\frac{2b}{\sqrt{a}},$$

e dunque i punti del grafico di ascisse $x = \pm\sqrt{a}$ sono punti angolosi.
Infine chiaramente $f'(0) = 0$, e per $x > 0$ il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $b(a - x^2)$, e dunque, se $b > 0$ la funzione f è crescente in $(0, \sqrt{a})$ e decrescente in $(\sqrt{a}, +\infty)$, ed ha pertanto un minimo in $x = 0$ e massimi in $x = \pm\sqrt{a}$. Viceversa se $b < 0$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 2$, $b = 3$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{c(\alpha-1)x}}{\big(a\cosh(x)+b\sinh(x)+c\big)^{\alpha+1}}dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

$[(a,b,c) = (5,4,3), (5,3,4), (5,-3,4), (5,-4,3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Notiamo che

$$\frac{1}{a\cosh(x)+b\sinh(x)+c} = \frac{2e^x}{(a+b)e^{2x}+2ce^x+(a-b)}.$$

Convergenza: L'integrale converge per $\frac{c-1}{c+1} < \alpha < \frac{c+1}{c-1}$.
Infatti per $x \to +\infty$

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a\cosh(x)+b\sinh(x)+c)^{\alpha+1}} \sim e^{(c(\alpha-1)-(\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha-1)-(\alpha+1)) < 0$, ovvero $\alpha < \frac{c+1}{c-1}$.
Mentre per $x \to -\infty$

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a\cosh(x)+b\sinh(x)+c)^{\alpha}} \sim e^{(c(\alpha-1)+(\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha-1)+(\alpha+1)) > 0$, ovvero $\alpha > \frac{c-1}{c+1}$.
Calcolo per $\alpha = 1$: Cambio di variabile $t = e^x$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a\cosh(x)+b\sinh(x)+c)^2}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4e^{2x}}{((a+b)e^{2x}+2ce^x+(a-b))^2}dx \\
&= 4\int_0^{+\infty} \frac{t}{((a+b)t^2+2ct+(a-b))^2}dt \\
&= \frac{4}{(a+b)^2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t+\frac{c}{a+b})^4}dt \\
&= \frac{4}{(a+b)^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^3}dt - \frac{4c}{(a+b)^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+\frac{c}{a+b})^4}dt \\
&= \frac{2}{c^2} - \frac{4}{3c^2} \\
&= \frac{2}{3c^2}.
\end{aligned}$$

Si noti infatti che nei tre casi abbiamo $c^2 = a^2 - b^2$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = Ax - Be^x.$$

$[(A, B) = (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 3)]$

Svolgimento: L'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 3y = 0$ ha soluzione generale $c_1e^x + c_2e^{3x}$.
L'equazione $y'' - 4y' + 3y = x$ ha come soluzione particolare $y = ax + b$ se $-4 + 3ax + 3b = x$, ovvero se $a = \frac{A}{3}$ e $b = \frac{4A}{9}$: $y = \frac{A}{3}x + \frac{4A}{9}$.
L'equazione $y''-4y'+3y = -Ae^x$ ha come soluzione particolare $y = cxe^x$ se $c(2+x)-4c(1+x)+3cx = -B$, ovvero se $c = \frac{B}{2}$: $y = \frac{B}{2}xe^x$.
Allora la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = x - e^x$ è $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{A}{3}x + \frac{4A}{9} + \frac{B}{2}xe^x$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$\frac{z+2}{|z|} = \frac{\mathrm{i}}{a}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: $z = 0$ non è soluzione. Se $z \neq 0$, posto $z = x + iy$ si ha

$$z + 2 = \frac{i}{a}|z| \;\Leftrightarrow\; x + 2 + iy = \frac{i}{a}\sqrt{x^2+y^2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+2=0 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{4+y^2} \end{cases}$$

ovvero

$$x = -2, \quad y = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Pertanto si ottiene un'unica soluzione $z = -2 + \frac{2i}{\sqrt{a^2-1}}$.

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2023 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\log(1+ax^2)} - \arctan\left(\sqrt{a}x + cx^3\right)}{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}.$$

$[(a,c) = (2,1), (4,-1), (3,1), (9,-1)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0^+$:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad \log(1+y) = y + o(y), \quad e^y = 1 + y + o(y),$$
$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3).$$

Pertanto

$$\sqrt{\log(1+ax^2)} = \sqrt{ax^2 - \frac{a^2x^4}{2} + o(x^5)} = \sqrt{a}x\sqrt{1 - \frac{ax^2}{2} + o(x^3)} = \sqrt{a}x\left(1 - \frac{ax^2}{4} + o(x^3)\right)$$
$$= \sqrt{a}x - \frac{a\sqrt{a}x^3}{4} + o(x^4),$$
$$\arctan(\sqrt{a}x + cx^3) = \sqrt{a}x + cx^3 - a\sqrt{a}\frac{x^3}{3} + o(x^4) = \sqrt{a}x + \left(c - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right)x^3 + o(x^4),$$

da cui segue

$$\sqrt{\log(1+ax^2)} - \arctan(\sqrt{a}x + cx^3) = \left(-c + \frac{a\sqrt{a}}{12}\right)x^3 + o(x^4).$$

D'altra parte

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^x = \exp\left(x\log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

da cui segue

$$1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\left(-6c + \frac{a\sqrt{a}}{2}\right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \cos^2 x \, e^{\frac{a}{\cos x}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})]$

Svolgimento: Consideriamo la funziona per $a = \sqrt{2}$:

$$f(x) = \cos^2 x \, e^{\frac{\sqrt{2}}{\cos x}}.$$

Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. la funzione è periodica (periodo 2π) e pari, basta studiarla per esempio in $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, dove f è di classe C^1. $f > 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ e

$$f(x) \to \begin{cases} 0 & \text{per } x \to \frac{\pi}{2}^+ \\ +\infty & \text{per } x \to \frac{\pi}{2}^- \end{cases}$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} \text{ è asintoto verticale.}}$

Per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ si ha che

$$f'(x) = \sin x(\sqrt{2} - 2\cos x)e^{\frac{\sqrt{2}}{\cos x}}, \text{quindi } f'(x) = 0 \iff x = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \pi.$$

Più precisamente, f è decrescente nell' intervallo $[0, \frac{\pi}{4}]$, e f è crescente negli intervalli $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Perciò f ha un massimo locale in $x = 0$ e un minimo locale in $x = \frac{\pi}{4}$. Inoltre

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = 0.$$

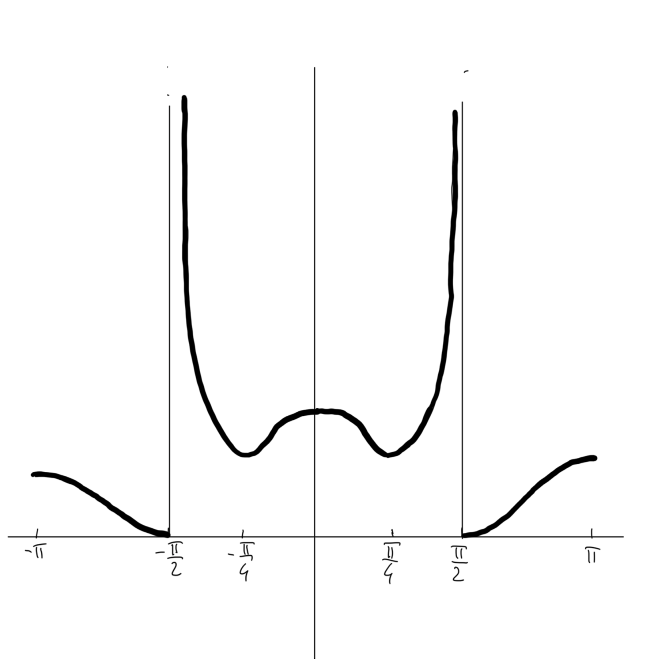


Figura 1. Grafico per $a = \sqrt{2}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{a/2} \sin^\alpha\Big(\frac{2\pi x}{a}\Big) \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

[$a = 5, 4, 3, 2$]

<u>*Svolgimento:*</u> Risulta

$$f(x) \sim \Big(\frac{2\pi x}{a}\Big)^\alpha \frac{x}{a-x} \sim \frac{2^{\alpha+1}\pi^\alpha}{a^{\alpha+1}} x^{\alpha+1} \text{ per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{a}{4}]$ se e solo se $\alpha > -2$. D'altra parte, posto $y = \frac{a}{2} - x$,

$$f(x) = \sin^\alpha\Big(\pi - \frac{2\pi}{ay}\Big) \arcsin\Big(\frac{\frac{a}{2} - y}{\frac{a}{2} + y}\Big) \sim \frac{\pi^{\alpha+1}2^{\alpha-1}}{a^\alpha} y^\alpha \text{ per } y \to 0^+,$$

da cui

$$f(x) \sim \frac{\pi^{\alpha+1}2^{\alpha-1}}{a^\alpha}\Big(\frac{a}{2} - x\Big)^\alpha \text{ per } x \to \frac{a}{2}^+.$$

Pertanto f è integrabile in $[\frac{a}{4}, \frac{a}{2})$ se e solo se $\alpha > -1$.
Segue che f è integrabile in $(0, \frac{a}{2})$ se e solo se $\alpha > -1$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_0^{a/2} \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) dx.$$

Integrando per parti si ha:

$$\int \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) dx = x \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) - \frac{a}{\sqrt{a}} \int \frac{x}{(a-x)\sqrt{a-2x}} dx.$$

Con la sostituzione $\sqrt{a-2x} = y$ nell'ultimo integrale si ottiene

$$\int \frac{x}{(a-x)\sqrt{a-2x}} dx = -\int \frac{a-y^2}{a+y^2} dy = -\int \Big(\frac{2a}{a+y^2} - 1\Big) dy = -2\sqrt{a} \arctan \frac{y}{\sqrt{a}} + y$$

$$= -2\sqrt{a} \arctan \frac{\sqrt{a-2x}}{\sqrt{a}} + \sqrt{a-2x}.$$

Si deduce

$$\int \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) dx = x \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) + 2a \arctan \frac{\sqrt{a-2x}}{\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}}\sqrt{a-2x}.$$

Pertanto si conclude

$$\int_0^{a/2} \arcsin\Big(\frac{x}{a-x}\Big) dx = a\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{x^2-1} y + ax^2 \\ y(0) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione lineare del I ordine, il cui secondo membro è definito per $x \neq \pm 1$. Poiché alora la condizione iniziale è imposta in $x_0 = 0 \in (-1,1)$, il dominio della soluzione sarà $(-1,1)$. In tale intervallo si ha pertanto

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \log|x^2-1| = \log(1-x^2),$$

e l'integrale generale è allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\log(1-x^2)} \left(c + a \int e^{-\log(1-x^2)} x^2 \, dx \right) \\ &= (1-x^2) \left(c + a \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx \right) \\ &= (1-x^2) \left(c - ax + \frac{a}{2} \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \right) \\ &= (1-x^2) \left(c - ax + \frac{a}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) \\ &= (1-x^2) \left(c - ax + a \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $\frac{1+x}{1-x} > 0$ per ogni $x \in (-1,1)$. Imponendo poi la condizione iniziale si trova $c = a$. La soluzione è pertanto

$$y(x) = a(1-x^2) \left(1 - x + \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right),$$

con intervallo di definizione $(-1,1)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1 \pm x}\right) \qquad \left[f(x) = \cos\left(\frac{x}{1 \pm x}\right)\right]$$

Svolgimento: Per $x \to 0$

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + o(x^5), \quad \frac{x}{1 \pm x} = x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 + o(x^5),$$

perciò

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) = \sin(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 + o(x^5)) \\
&\quad = x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 - \tfrac{1}{6}(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5)^3 + \tfrac{1}{120}(x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5)^5 + o(x^5) \\
&\quad = x \mp x^2 + x^3 \mp x^4 + x^5 - \tfrac{1}{6}(x^3 \mp 3x^4 + 6x^5) + \tfrac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\
&\quad = x \mp x^2 + \tfrac{5}{6}x^3 \mp \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2024-I Turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\left(|x-a| + |x-b| + 4\right) e^{-1/x} \qquad \left(f(x) = \tfrac{1}{2}\left(|x+a| + |x+b| + 4\right) e^{1/x}\right),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[(a,b) = (3,5), (9,11)]$

Svolgimento: Consideriamo il caso che $f(x) = \frac{1}{2}\left(|x-a| + |x-b| + 4\right) e^{-1/x}$. Nell'altro caso basta scambiare x e $-x$.
Si osservi che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a-x+b-x+4)e^{-1/x} = \left(\frac{a+b}{2} + 2 - x\right) e^{-1/x} & \text{se } x < a, x \neq 0 \\ \frac{1}{2}(x-a+b-x+4)e^{-1/x} = \left(\frac{b-a}{2} + 2\right) e^{-1/x} & \text{se } a \leq x \leq b \\ \frac{1}{2}(x-a+x-b+4)e^{-1/x} = \left(x - \frac{a+b}{2} + 2)\right)e^{-1/x} & \text{se } x > b. \end{cases}$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad f(x) > 0 \text{ per ogni } x \neq 0.$$

Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a+b}{2} + 2 - x\right)\left(1 - \frac{1}{x}(1 + o(1)\right) = -x + \frac{a+b}{2} + 3 + o(1) & \text{per } x \to -\infty \\ \left(x - \frac{a+b}{2} + 2)\right)\left(1 - \frac{1}{x}(1 + o(1)\right) = x - \frac{a+b}{2} + 1 + o(1) & \text{per } x \to +\infty, \end{cases}$$

f ha gli asintoti obliqui $y = -x + \frac{a+b}{2} + 3$ per $x \to -\infty$ e $y = x - \frac{a+b}{2} + 1$ per $x \to +\infty$.
Inoltre f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, a, b\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{a+b}{2}+2-x}{x^2} - 1\right) e^{-1/x} = \frac{-x^2-x+\frac{a+b}{2}+2}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x < a, x \neq 0 \\ \frac{\frac{b-a}{2}+2}{x^2} e^{-1/x} > 0 & \text{se } a < x < b \\ \left(\frac{x-\frac{a+b}{2}+2}{x^2} + 1\right) e^{-1/x} = \frac{x^2+x-\frac{a+b}{2}+2}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x > b. \end{cases}$$

In particolare $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ sono punti angolosi del grafico:

$$f'_-(a) = \frac{-a^2 + \frac{b-a}{2} + 2}{a^2} e^{-1/a} < 0 < f'_+(a) = \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{a^2} e^{-1/a}$$

e

$$0 < f'_-(b) = \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{b^2} e^{-1/b} < f_+(b) = \frac{b^2 + \frac{b-a}{2} + 2}{b^2} e^{-1/b}.$$

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.
Studiando i segni dei polinomi quadratici $-x^2 - x + \frac{a+b}{2} + 2$ e $x^2 + x - \frac{a+b}{2} + 2$ e ponendo

$$-x_1 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{9 + 2(a+b)}, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{9 + 2(a+b)},$$

si trova che

$$f'(x) \begin{cases} = 0 & \text{se } x = -x_1 \text{ oppure } x_2 \\ < 0 & \text{se } x < -x_1 \text{ oppure } x_2 < x < a \\ > 0 & \text{se } -x_1 < x < x_2 \ (x \neq 0) \text{ oppure } x > a \ (x \neq b). \end{cases}$$

In particolare f è strettamente crescente in $[-x_1, 0)$, in $(0, x_2]$ e in $[a, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -x_1]$ e in $[x_2, a]$. Essendo continua in $\mathbb{R}^-$ e in $\mathbb{R}^+$, f ha minimi locali in $x = -x_1$ e $x = a$ e un massimo locale in $x = 2$. f non ha estremi assoluti ($\sup f = +\infty$, $\inf f = 0$).

Riassumendo, abbiamo nella versione

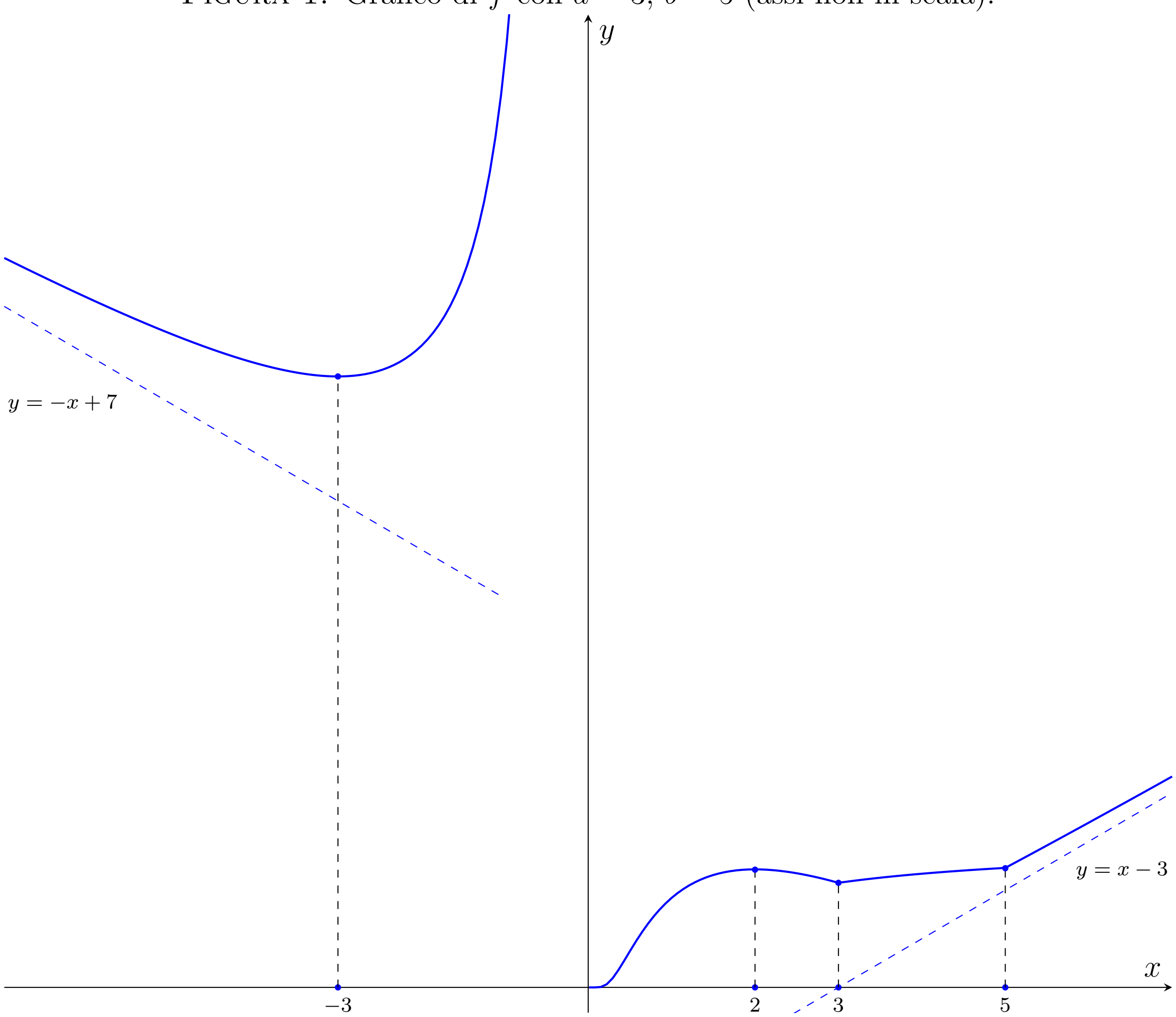
A: f ha AO $y = 7 - x$ ($y = x - 3$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = \pm 3$ punti di minimo; $x = 2$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^-$; $x = 3$ e $x = 5$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^+$;

B: f ha AO $y = -3 - x$ ($y = x + 7$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = \pm 3$ punti di minimo; $x = -2$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^+$; $x = -3$ e $x = -5$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^-$;

C: f ha AO $y = 13 - x$ ($y = x - 9$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = -4$ e $x = 9$ punti di minimo; $x = 3$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^-$; $x = 9$ e $x = 11$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^+$;

D: f ha AO $y = -9 - x$ ($y = x - 13$) per $x \to -\infty$ ($+\infty$); $x = 4$ e $x = -9$ punti di minimo; $x = -3$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \to 0^+$; $x = -9$ e $x = -11$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \to 0$ per $x \to 0^-$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 3$, $b = 5$ (assi non in scala).



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [7 punti] Mettere le seguenti tre funzioni in ordine crescente di infinitesimo per $x \to -a$:

$$f(x) = b(x+a)^2 + e^{-1/(x+a)^2}$$
$$g(x) = \log(x+a+1) + 1 - \sin(x+a) - \cos(x+a)$$
$$h(x) = (x+a)^3 \log(|x+a|).$$

$[(a,b) = (4,1), (3,-2), (1,-3), (2,5)]$

Svolgimento: Si ha che, per $x \to -a$,

$$f(x) = b(x+a)^2(1+o(1))\,;$$
$$g(x) = (x+a) - \tfrac{1}{2}(x+a)^2 + \tfrac{1}{3}(x+a)^3 + 1 - (x+a) + \tfrac{1}{6}(x+a)^3 - 1 + \tfrac{1}{2}(x+a)^2 + o((x+a)^3)$$
$$= \tfrac{1}{2}(x+a)^3(1+o(1))).$$

Inoltre, poiché $\log(|x+a|) \to -\infty$ e $(x+a)\log(|x+a|) \to 0$, si ha che

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1+o(1)}{2\log(|x+a|)} \to 0, \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{(x+a)\log(|x+a|)}{b(1+o(1))} \to 0 \qquad \text{per } x \to -a,$$

quindi l'ordine richiesto è

$$f(x),\ h(x),\ g(x).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Determinare il polinomio di Maclaurin di ordine 5 di

$$f(x) = \sin(\log(1 + ax)).$$

$[a = \pm 2, \pm 3]$

Svolgimento: Per $y \to 0$ si ha che $\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 + o(y^5)$ e $\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5)$, quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 - \tfrac{1}{4}a^4x^4 + \tfrac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5)) \\ &= \left(ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 - \tfrac{1}{4}a^4x^4 + \tfrac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5)\right) \\ &\qquad - \tfrac{1}{6}\left(ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 + o(x^3)\right)^3 + \tfrac{1}{120}\left(ax + o(x)\right)^5 + o(x^5) \\ &= ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{3}a^3x^3 - \tfrac{1}{4}a^4x^4 + \tfrac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5) \\ &\qquad - \tfrac{1}{6}\left(a^3x^3 - \tfrac{3}{2}a^4x^4 + a^5x^5 + \tfrac{3}{4}a^5x^5 + o(x^5)\right) + \tfrac{1}{120}(a^5x^5 + o(x^5)) + o(x^5) \\ &= ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{6}a^3x^3 + \tfrac{24-20-15+1}{120}a^5x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Per l'unicità nel Teorema di Peano, il polinomio richiesto è

$$ax - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \tfrac{1}{6}a^3x^3 - \tfrac{1}{12}a^5x^5.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}}\, dx.$$

[$b = 5, 4, 3, 2$]

Svolgimento: Poiché la funzione integranda è continua in $\mathbb{R}^+$, basta studiare la convergenza dell'integrale per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Poiché

$$\frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}} = x^{b-\alpha}(1 + o(1)) \quad \text{per } x \to 0^+,$$

si ha che, per $x \to 0^+$, l'integrale converge se e solo se $b - \alpha > -1$, ovvero se e solo se $\alpha < b + 1$.
Per $x \to +\infty$ invece si osservi che

$$\frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}} = x^{b+2-\alpha-\frac{6}{2}}(1 + o(1)) = x^{b-1-\alpha}(1 + o(1)),$$

quindi l'integrale converge per $x \to +\infty$ se e solo se $b - 1 - \alpha < -1$, ovvero se e solo se $\alpha > b$.
In conclusione, l'integrale improprio è convergente se e solo se $b < \alpha < b + 1$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[5 punti]** Sia $y \in C^1(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (ae^{-2x}+1)y' = ay(e^{-2x}-1) & \text{in } \mathbb{R} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Determinare $y(x)$ e il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$.
$[a = 7, 5, 1, 3]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è del primo ordine, lineare e omogenea, quindi la sua soluzione generale è

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \quad \text{dove } C \in \mathbb{R} \text{ e } A(x) = a\int \frac{e^{-2x}-1}{ae^{-2x}+1}\,dx.$$

Ponendo $t = e^{-2x} > 0$ si ha che $dx = -\frac{1}{2t}\,dt$ e

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{a}{2}\int \frac{t-1}{t(at+1)}\,dt = -\frac{a}{2}\int \left(-\frac{1}{t} + \frac{a+1}{at+1}\right)\,dt \\ &= \frac{a}{2}\log t - \frac{a+1}{2}\log(at+1) = \frac{a}{2}\log e^{-2x} - \frac{a+1}{2}\log(ae^{-2x}+1) \\ &= -ax - \frac{a+1}{2}\log(ae^{-2x}+1). \end{aligned}$$

Si determina C dalla condizione $y(0) = -1$: $y(0) = Ce^{A(0)} = -1$, ovvero

$$C = -e^{-A(0)} = -e^{\frac{a+1}{2}\log(a+1)} = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}}.$$

Perciò

$$y(x) = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}} e^{-ax-\frac{a+1}{2}\log(ae^{-2x}+1)} = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}} e^{-ax}(1+ae^{-2x})^{-\frac{a+1}{2}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare

$$y(x) = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}} e^{-ax}(1+o(1))^{-\frac{a+1}{2}} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Esame orale:	
Titolare del corso:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}}}{3b(x-\sin x)}.$$

$[(a,b) = (2,3), (-2,3), (3,2), (-3,2)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha

$$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) &= 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{ax}{2}}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{a^3x^3}{8} + o(x^3)\right)\right)\\
&= 4\sin\left(\frac{\pi a x}{4} - \frac{\pi a^2 x^2}{8} + \frac{\pi a^3 x^3}{16} + o(x^3)\right)\\
&= \pi a x - \frac{\pi a^2 x^2}{2} + \frac{\pi a^3 x^3}{4} - \frac{1}{6}\frac{\pi^3 a^3 x^3}{16} + o(x^3)\\
&= \pi a x - \frac{\pi a^2 x^2}{2} + \frac{(24\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3)
\end{aligned}$$

e pertanto il numeratore diventa

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}} &= \pi a x - \frac{\pi a^2x^2}{2} + \frac{(24\pi-\pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3) - \pi a x\left(1 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{8} + o(x^2)\right)\\
&= \frac{(12\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3),
\end{aligned}$$

e il limite richiesto è dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(12\pi-\pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3)}{\frac{b}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{(12\pi - \pi^3)a^3}{48b}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x-a}\, e^{\frac{1}{x-a}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[a = 2, -2, 3, -3]$

Svolgimento: In questo svolgimento studieremo il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{\frac{1}{x}}$, di cui i grafici richiesti sono traslazioni e simmetrizzazione opportune.

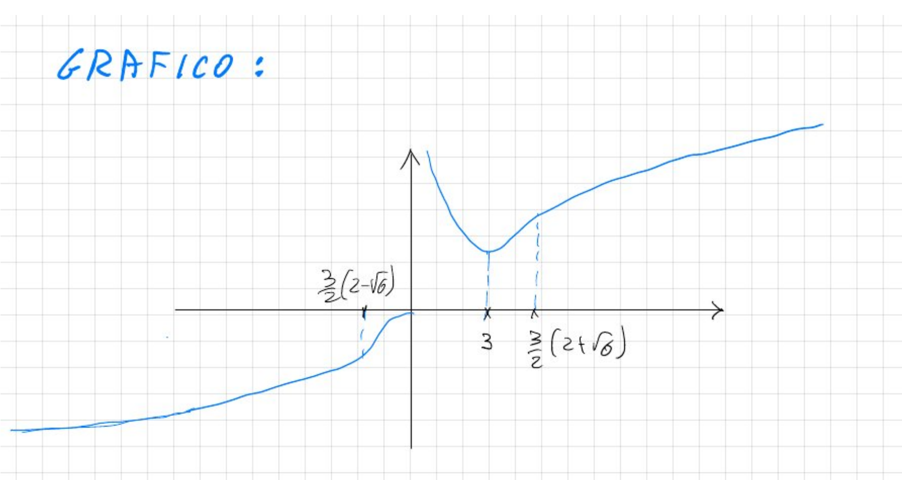
- Non vi sono simmetrie (né nelle versioni proposte).
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) > 0 \;\Leftrightarrow x > 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
- $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^{\frac{5}{3}}}(x-3)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

  Osserviamo che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0^-, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty.$
- $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

  3 è quindi punto di minimo relativo, con $f(3) = (3e)^{\frac{1}{3}}$.
- Calcoliamo $f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{9\,x^{\frac{11}{3}}}(2\,x^2 - 12x - 9)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

  Risulta $\lim\limits_{x\to 0^-} f''(x) = 0^-$ (e $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = +\infty$).
- $f''(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2}(2-\sqrt{6})] \cup (0, \frac{3}{2}(2+\sqrt{6})]$.

  Abbiamo quindi i seguenti due punti di flesso: $\frac{3}{2}(2 \pm \sqrt{6})$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+|\log x|)^\alpha}{\sqrt{ax+1}} \frac{x^{1+\alpha}}{(ax+2)^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Risulta

$$f(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{4} x^{1+\alpha} \text{ per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0,1]$ se e solo se $\alpha \geq -2$. D'Altra parte

$$f(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{a^2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}-\alpha}} \text{ per } x \to +\infty.$$

Pertanto f è integrabile in $[1, +\infty)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.
Segue che f è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $-2 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$: con la sostituzione $\sqrt{ax+1} = y$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale:

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = -\int \frac{1}{y^2+1} dy + 2\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy.$$

Integrando per parti

$$\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{1}{2}\int y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' dy = -\frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1} dy$$

da cui segue

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{y}{y^2+1}.$$

Si deduce

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = \lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{y}{y^2+1}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto si conclude

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = \frac{1}{a^2}.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 + a^2}{xy}, \\ y(1) = -a, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Equazione a variabili separabili senza soluzioni stazionarie, secondo membro definito per $x \neq 0$, $y \neq 0$. Poiché $y(0) < 0$ deve essere $y(x) < 0$ per ogni x. Separando le variabili si ottiene

$$\frac{1}{2}\log(y^2 + a^2) = \log|x| + c$$

e imponendo la condizione iniziale si trova $c = \log(\sqrt{2}a)$. La soluzione è pertanto

$$y(x) = -a\sqrt{2x^2 - 1}, \quad x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \big(\cos x\big)^{a \sin x}.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Pertanto sarà sufficiente sviluppare $\cos(x)$ fino all' ordine 4 così come $\ln(\cos(x))$. Pertanto

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

e

$$\log(\cos(x)) = \log(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Ora

$$\begin{aligned}\big(\cos x\big)^{a \sin x} &= \exp(a \sin(x) \log(\cos(x)))\\ &= \exp(a(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)))\\ &= \exp(-a\frac{x^3}{2} + o(x^5))\\ &= 1 - a\frac{x^3}{2} + o(x^5).\end{aligned}$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – II turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Esame orale:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}}}{3b(x-\sin x)}.$$

$[(a,b) = (2,3), (-2,3), (3,2), (-3,2)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha

$$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) &= 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{ax}{2}}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{a^3x^3}{8} + o(x^3)\right)\right) \\
&= 4\sin\left(\frac{\pi a x}{4} - \frac{\pi a^2 x^2}{8} + \frac{\pi a^3 x^3}{16} + o(x^3)\right) \\
&= \pi a x - \frac{\pi a^2 x^2}{2} + \frac{\pi a^3 x^3}{4} - \frac{1}{6}\frac{\pi^3 a^3 x^3}{16} + o(x^3) \\
&= \pi a x - \frac{\pi a^2 x^2}{2} + \frac{(24\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3)
\end{aligned}$$

e pertanto il numeratore diventa

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\frac{\pi}{ax+2}\right) - \pi a x e^{-\frac{ax}{2}} &= \pi a x - \frac{\pi a^2 x^2}{2} + \frac{(24\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3) - \pi a x\left(1 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2x^2}{8} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{(12\pi - \pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3),
\end{aligned}$$

e il limite richiesto è dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(12\pi-\pi^3)a^3x^3}{96} + o(x^3)}{\frac{b}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{(12\pi - \pi^3)a^3}{48b}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x-a}\, e^{\frac{1}{x-a}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[a = 2, -2, 3, -3]$

Svolgimento: In questo svolgimento studieremo il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{\frac{1}{x}}$, di cui i grafici richiesti sono traslazioni e simmetrizzazione opportune.

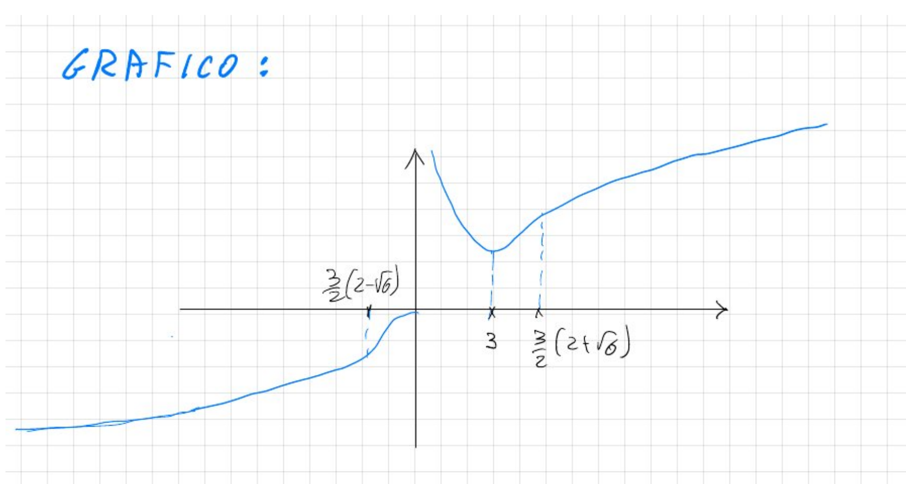
- Non vi sono simmetrie (né nelle versioni proposte).
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) > 0 \;\Leftrightarrow x > 0$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
- $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^{\frac{5}{3}}}(x-3)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

  Osserviamo che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0^-, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty.$
- $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

  3 è quindi punto di minimo relativo, con $f(3) = (3e)^{\frac{1}{3}}$.
- Calcoliamo $f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{9\,x^{\frac{11}{3}}}(2\,x^2 - 12x - 9)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

  Risulta $\lim_{x\to 0^-} f''(x) = 0^-$ (e $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = +\infty$).
- $f''(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2}(2-\sqrt{6})] \cup (0, \frac{3}{2}(2+\sqrt{6})]$.

  Abbiamo quindi i seguenti due punti di flesso: $\frac{3}{2}(2 \pm \sqrt{6})$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+|\log x|)^\alpha}{\sqrt{ax+1}} \frac{x^{1+\alpha}}{(ax+2)^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

<u>*Svolgimento:*</u> Risulta

$$f(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{4} x^{1+\alpha} \text{ per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, 1]$ se e solo se $\alpha \geq -2$. D'Altra parte

$$f(x) \sim \frac{|\log x|^\alpha}{a^2 \sqrt{a} x^{\frac{3}{2}-\alpha}} \text{ per } x \to +\infty.$$

Pertanto f è integrabile in $[1, +\infty)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.
Segue che f è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $-2 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$: con la sostituzione $\sqrt{ax+1} = y$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale:

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = -\int \frac{1}{y^2+1} dy + 2 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy.$$

Integrando per parti

$$\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{1}{2} \int y \left(\frac{1}{y^2+1} \right)' dy = -\frac{1}{2} \frac{y}{y^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2+1} dy$$

da cui segue

$$\int \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = -\frac{y}{y^2+1}.$$

Si deduce

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{y}{y^2+1} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto si conclude

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{ax+1}(ax+2)^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_1^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+1)^2} dy = \frac{1}{a^2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 + a^2}{xy}, \\ y(1) = -a, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Equazione a variabili separabili senza soluzioni stazionarie, secondo membro definito per $x \neq 0$, $y \neq 0$. Poiché $y(0) < 0$ deve essere $y(x) < 0$ per ogni x. Separando le variabili si ottiene

$$\frac{1}{2} \log(y^2 + a^2) = \log |x| + c$$

e imponendo la condizione iniziale si trova $c = \log(\sqrt{2}a)$. La soluzione è pertanto

$$y(x) = -a\sqrt{2x^2 - 1}, \quad x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \big(\cos x\big)^{a \sin x}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Pertanto sarà sufficiente sviluppare $\cos(x)$ fino all' ordine 4 così come $\ln(\cos(x))$. Pertanto

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

e

$$\log(\cos(x)) = \log(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Ora

$$\begin{aligned}
\big(\cos x\big)^{a \sin x} &= \exp(a \sin(x) \log(\cos(x))) \\
&= \exp(a(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4))) \\
&= \exp(-a\frac{x^3}{2} + o(x^5)) \\
&= 1 - a\frac{x^3}{2} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n - e\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right)\right]$$

$[a=\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}]$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{n+a}\right) &= \log\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2a}{n^3}\right)+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a+\frac{1}{2}}{n^2}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Dunque

$$\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n+a})} = e^{1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e\left(1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Essendo infine $\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right) = 1-\frac{2a+1}{2n}+\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to+\infty} en^2\left(\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}-\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{16a^2+16a+5}{12}e.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}(\log^2 x - a^2)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}]$

Svolgimento: Dominio: $\{x > 0\}$. Risulta

$$f(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq e^{-a} \text{ e } x \geq e^{a}, \quad f(x) = 0 \iff x = e^{-a}, e^{a}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x - a^2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Per $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\log^2 x + 4\log x - a^2}{2\sqrt{x}},$$

pertanto f è crescente per $0 < x \leq e^{-2-\sqrt{4+a^2}}$ e $x \geq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$, e f è decrescente per $e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \leq x \leq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$.

$\boxed{x = e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di massimo relativo, } x = e^{-2+\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

$\boxed{x = 0 \text{ punto di cuspide.}}$

Per $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{8 + a^2 - \log^2 x}{4x\sqrt{x}},$$

pertanto f è concava per $0 < x \leq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e $x \geq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e f è convessa per $e^{-\sqrt{8+a^2}} \leq x \leq e^{\sqrt{8+a^2}}$.

$\boxed{x = e^{-\sqrt{8+a^2}},\ x = e^{\sqrt{8+a^2}} \text{ punti di flesso.}}$

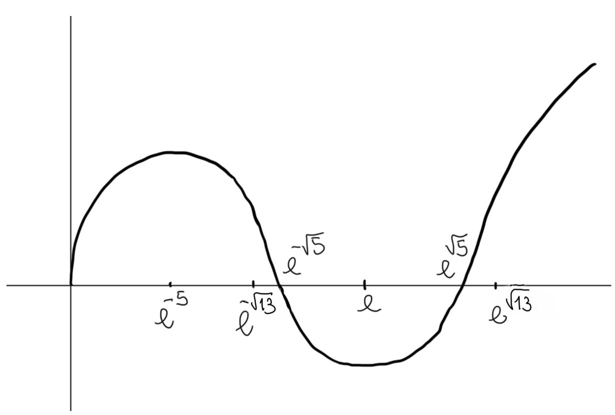


FIGURE 1. Grafico per $a = \sqrt{5}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha-1}(1+x)^2}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 2$.

$[a = 2, 3]$

—

Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha+1}(1+x)^2}\, dx$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 4, 5]$

Svolgimento: Consideriamo il primo testo, con $a = 2$. Chiamiamo f_α la funzione integranda.
Studio della convergenza dell'integrale improprio

- Nell'eventuale polo 0 abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}} = -2,$$
quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, ovvero $\alpha < \frac{5}{2}$.
- A $+\infty$ abbiamo
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-1+2-\frac{3}{2}}}} = c \in (0, +\infty),$$
quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, ovvero $\alpha > \frac{3}{2}$.

Riassumendo, c'è convergenza se e solo se $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$.

Calcolo dell'integrale per $\alpha = 2$

Con il cambio di variabile $x^{1/2} = t$ si ha

$$I := \int_0^\infty \frac{x^{3/2} - 2x^{1/2}}{x(1+x)^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{t^3 - 2t}{t^2(1+t^2)^2} 2t\, dt = 2\int_0^\infty \frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

Utilizzando il metodo di Hermite, cerchiamo le costanti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2} = \frac{At + B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\frac{Ct + D}{1+t^2}.$$

Eseguendo i conti al lato destra dell'uguaglianza, siamo condotti a verificare

$$t^2 - 2 = At^3 + (B - C)t^2 + (A - 2D)t + B + C,$$

ed eguagliando i coefficienti troviamo $A = D = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$.

Quindi l'integrale proposto diventa:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{c\to\infty} \left\{ 2\int_0^c -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt + \left[2\left(-\frac{3}{2}\right)\,\frac{t}{1+t^2}\right]_0^c \right\} \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[-\operatorname{arctg} t - 3\frac{t}{1+t^2}\right]_0^c \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[-\operatorname{arctg} c - 3\frac{c}{1+c^2}\right] \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che in alternativa al metodo di Hermite, si può calcolare l'integrale proposto nel seguente modo:

$$\int \frac{t^2-2}{(1+t^2)^2}\,dx = \int \left[-2\,\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} + 3\,\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\right] dt = -2\operatorname{arctg} t + 3\left(-\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} t\right) + c,$$

dove abbiamo utilizzato la nota soluzione per parti

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,t\,dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+t^2}\,t + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y\sin x = b\cos^2 x \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[(a, b) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 2)]$

Svolgimento: La soluzione y_h dell'equazione omogenea associata è:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin(x)dx \iff \ln|y| = -\cos(x) + k \iff y_h(x) = c\exp(-\cos(x)).$$

Per determinare la soluzione generale $y(x)$ useremo il metodo della variazione delle costanti per avere

$$y(x) = c(x)\exp(-\cos(x)),$$

con

$$c'(x) = b\cos^2(x)\sin(x)\exp(\cos(x)).$$

Con una doppia integrazione per parti otteniamo quindi

$$y(x) = c\exp(-\cos(x)) - b(\cos^2(x) - 2\cos(x) + 2) \quad x \in \mathbb{R},$$

con costante $c = a + 2b$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} w - z = \overline{z} \\ wz^2 = a\overline{w} \end{cases} .$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento:

Dalla prima equazione risulta $w = z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$, per cui deduciamo che w è un numero reale.

Quindi la seconda equazione è soddisfatta da:

- $w = 0$, che inserito nella prima equazione dice $\mathrm{Re}\,z = 0$ ed abbiamo le soluzioni
$$\begin{cases} z = y\,i \qquad y \in \mathbb{R} \\ w = 0. \end{cases}$$
- $w \neq 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{a}$, che inserito nella prima equazione dà $w = \pm 2\sqrt{a}$. Abbiamo allora le ulteriori soluzioni
$$\begin{cases} z = \sqrt{a} \\ w = 2\sqrt{a}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\sqrt{a} \\ w = -2\sqrt{a}. \end{cases}$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2023 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n - e\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right)\right]$$

$[a = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{n+a}\right) &= \log\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2a}{n^3}\right)+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{a+\frac{1}{2}}{n^2}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Dunque

$$\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n+a})} = e^{1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{a^2+a+\frac{1}{3}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e\left(1-\frac{a+\frac{1}{2}}{n}+\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Essendo infine $\cos\left(\sqrt{\frac{2a+1}{n}}\right) = 1-\frac{2a+1}{2n}+\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, si conclude che il limite richiesto vale

$$\lim_{n\to+\infty} en^2\left(\frac{36a^2+36a+11}{24n^2}-\frac{(2a+1)^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{16a^2+16a+5}{12}e.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}(\log^2 x - a^2)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}]$

Svolgimento: Dominio: $\{x > 0\}$. Risulta

$$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow 0 < x \leq e^{-a} \text{ e } x \geq e^{a}, \quad f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e^{-a}, e^{a}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x - a^2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Per $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\log^2 x + 4\log x - a^2}{2\sqrt{x}},$$

pertanto f è crescente per $0 < x \leq e^{-2-\sqrt{4+a^2}}$ e $x \geq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$, e f è decrescente per $e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \leq x \leq e^{-2+\sqrt{4+a^2}}$.

$\boxed{x = e^{-2-\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di massimo relativo, } x = e^{-2+\sqrt{4+a^2}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

$\boxed{x = 0 \text{ punto di cuspide.}}$

Per $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{8 + a^2 - \log^2 x}{4x\sqrt{x}},$$

pertanto f è concava per $0 < x \leq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e $x \geq e^{-\sqrt{8+a^2}}$ e f è convessa per $e^{-\sqrt{8+a^2}} \leq x \leq e^{\sqrt{8+a^2}}$.

$\boxed{x = e^{-\sqrt{8+a^2}},\ x = e^{\sqrt{8+a^2}} \text{ punti di flesso.}}$

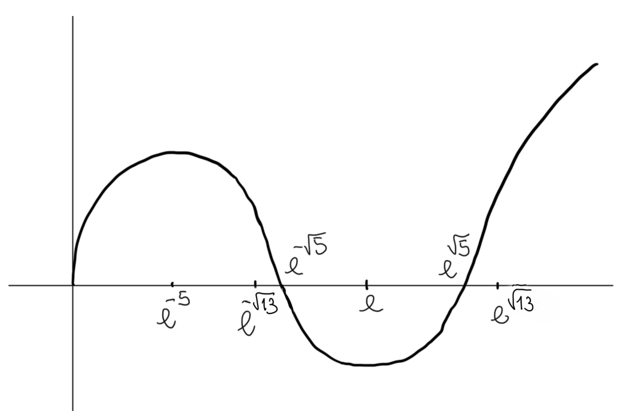


FIGURE 1. Grafico per $a = \sqrt{5}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha-1}(1+x)^2}\,dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 2$.

$[a = 2, 3]$

—

Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} - ax^{1/2}}{x^{\alpha+1}(1+x)^2}\,dx$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 4, 5]$

Svolgimento: Consideriamo il primo testo, con $a = 2$. Chiamiamo f_α la funzione integranda.

Studio della convergenza dell'integrale improprio

- Nell'eventuale polo 0 abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}} = -2,$$
quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, ovvero $\alpha < \frac{5}{2}$.
- A $+\infty$ abbiamo
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^{\alpha-1+2-\frac{3}{2}}}} = c \in (0, +\infty),$$
quindi per confronto asintotico abbiamo convergenza se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, ovvero $\alpha > \frac{3}{2}$.

Riassumendo, c'è convergenza se e solo se $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$.

Calcolo dell'integrale per $\alpha = 2$

Con il cambio di variabile $x^{1/2} = t$ si ha

$$I := \int_0^\infty \frac{x^{3/2} - 2x^{1/2}}{x(1+x)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{t^3 - 2t}{t^2(1+t^2)^2}\,2t\,dt = 2\int_0^\infty \frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Utilizzando il metodo di Hermite, cerchiamo le costanti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2 - 2}{(1+t^2)^2} = \frac{At + B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\frac{Ct + D}{1+t^2}.$$

Eseguendo i conti al lato destra dell'uguaglianza, siamo condotti a verificare

$$t^2 - 2 = At^3 + (B - C)t^2 + (A - 2D)t + B + C,$$

ed eguagliando i coefficienti troviamo $A = D = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$.

Quindi l'integrale proposto diventa:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{c\to\infty} \left\{ 2 \int_0^c -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt + \left[2\left(-\frac{3}{2}\right)\,\frac{t}{1+t^2}\right]_0^c \right\} \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[-\operatorname{arctg} t - 3\frac{t}{1+t^2} \right]_0^c \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[-\operatorname{arctg} c - 3\frac{c}{1+c^2} \right] \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che in alternativa al metodo di Hermite, si può calcolare l'integrale proposto nel seguente modo:

$$\int \frac{t^2-2}{(1+t^2)^2}\,dx = \int \left[-2\,\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} + 3\,\frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right] dt = -2\operatorname{arctg} t + 3\left(-\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} t \right) + c,$$

dove abbiamo utilizzato la nota soluzione per parti

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,t\,dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+t^2}\,t + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y\sin x = b\cos^2 x \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a \end{cases},$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[(a, b) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 2)]$

Svolgimento: La soluzione y_h dell'equazione omogenea associata è:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin(x)dx \iff \ln|y| = -\cos(x) + k \iff y_h(x) = c\exp(-\cos(x)).$$

Per determinare la soluzione generale $y(x)$ useremo il metodo della variazione delle costanti per avere

$$y(x) = c(x)\exp(-\cos(x)),$$

con

$$c'(x) = b\cos^2(x)\sin(x)\exp(\cos(x)).$$

Con una doppia integrazione per parti otteniamo quindi

$$y(x) = c\exp(-\cos(x)) - b(\cos^2(x) - 2\cos(x) + 2) \quad x \in \mathbb{R},$$

con costante $c = a + 2b$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} w - z = \overline{z} \\ wz^2 = a\overline{w} \end{cases} .$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento:

Dalla prima equazione risulta $w = z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$, per cui deduciamo che w è un numero reale.

Quindi la seconda equazione è soddisfatta da:

- $w = 0$, che inserito nella prima equazione dice $\mathrm{Re}\,z = 0$ ed abbiamo le soluzioni

$$\begin{cases} z = y\,i \qquad y \in \mathbb{R} \\ w = 0. \end{cases}$$

- $w \neq 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{a}$, che inserito nella prima equazione dà $w = \pm 2\sqrt{a}$. Abbiamo allora le ulteriori soluzioni

$$\begin{cases} z = \sqrt{a} \\ w = 2\sqrt{a}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\sqrt{a} \\ w = -2\sqrt{a}. \end{cases}$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 20/06/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
L **Esame orale**:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. **[6 punti]** Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)\left(a\sqrt{1+x^2}+(4a-9)x+\left(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right).$$

[$a = 2, 4, 5, 6$]

<u>*Svolgimento:*</u> Per $x \to -\infty$

$$a\sqrt{1+x^2} = a|x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}} = -ax\left(1+\tfrac{1}{2x^2}-\tfrac{1}{8x^4}+o(\tfrac{1}{x^4})\right) = -ax-\tfrac{a}{2x}+\tfrac{a}{8x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})$$

$$(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2})\sin(\tfrac{1}{x}) = (3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2})\left(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{6x^3}+\tfrac{1}{120x^5}+o(\tfrac{1}{x^5})\right) = 3(3-a)x+\tfrac{a}{2x}-\tfrac{a+7}{40}\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3})$$

Perciò

$$(x^3+1)\left(a\sqrt{1+x^2}+(4a-9)x+\left(3(3-a)x^2+\tfrac{3}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = (x^3+1)\tfrac{4a-7}{40}\tfrac{1}{x^3}+o(\tfrac{1}{x^3}) \to \tfrac{4a-7}{40}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{a}{e^{-|x+b|}+1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità e convessità e eventuali punti di flesso. **È richiesto** lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)]$

Svolgimento: Il dominio è dom$f = \mathbb{R}$ e la funzione è continua in $\mathbb{R}$. Per $a > 0$ si ha $\frac{a}{2} = f(-b) \leq f(x) < a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, se $a > 0$, $-b$ è un punto di minimo assoluto. Analogamente, per $a < 0$ si ha $a < f(x) \leq \frac{a}{2} = f(-b)$. In particolare, se $a < 0$, $-b$ è un punto di massimo assoluto assoluto.

In entrambi i casi il grafico della funzione non interseca l'asse x. Il punto di intersezione con l'asse y è

$$(0, f(0)) = \left(0, \frac{a}{e^{-|b|}+1}\right).$$

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$$

e quindi la retta di equazione $y = a$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to \pm\infty$. Essendo la funzione continua su $\mathbb{R}$ non ci sono asintoti verticali.
La funzione è chiaramente derivabile in $(-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$ e la sua derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{ae^{-|x+b|}}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^2} & \text{per} \quad x > -b \\ \frac{-ae^{-|x+b|}}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^2} & \text{per} \quad x < -b \end{cases}$$

Quindi, per $a > 0$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-b, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -b)$. Quindi f è strettamente decrescente per in $(-\infty, -b)$ e strettamente crescente in $(-b, +\infty)$. Come già osservato $-b$ è un punto di minimo assoluto e non ci sono altri punti di estremo locale.

Analogamente, per $a < 0$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-b, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -b)$. Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, -b)$ e strettamente decrescente in $(-b, +\infty)$. Come già osservato $-b$ è un punto di massimo assoluto e non ci sono altri punti di estremo locale.
Si ha inoltre

$$f'_+(-b) = \frac{a}{4} \quad \text{e} \quad f'_-(-b) = -\frac{a}{4} \neq f'_+(-b).$$

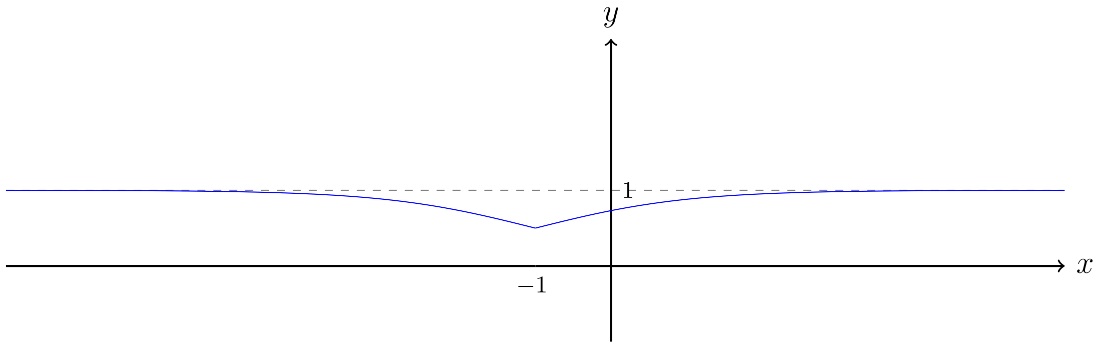
Quindi la funzione non è derivabile $-b$ e $-b$ è un punto angoloso.

La f'(x) è chiaramente derivabile in $(-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$ e la sua derivata è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{ae^{-|x+b|}\left(e^{-|x+b|}-1\right)}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^3} & \text{per} \quad x > -b \\ \frac{ae^{-|x+b|}\left(e^{-|x+b|}-1\right)}{\left(e^{-|x+b|}+1\right)^3} & \text{per} \quad x < -b \end{cases}$$

Quindi, se $a > 0$, $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$. Quindi f è strettamente concava in $(-\infty, -b)$ e in $(-b, +\infty)$. Non ci sono punti di flesso. Si noti che f non è concava in $\mathbb{R}$ ad esempio perché, per $a > 0$, si ha $f'_+(-b) > f'_-(-b)$.
Analogamente, se $a < 0$, $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$. Quindi f è strettamente convessa in $(-\infty, -b)$ e in $(-b, +\infty)$. Non ci sono punti di flesso. Inoltre f non è convessa in $\mathbb{R}$.

Riportiamo qui sotto il grafico di f per $(a, b) = (1, 1)$.



y
1
−1
x

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2}\, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a,b) = (2,2),(3,4),(4,5),(5,6)]$

Svolgimento: In tutti i casi abbiamo $b \geq a \geq 2$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è continua in $(0,+\infty)$. Basta quindi studiare la convergenza a $+\infty$ e la convergenza in (un intorno destro di) 0.
Studiamo prima la convergenza a $+\infty$. Si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2} \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}{x^{b\alpha+3}} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, si ha convergenza a $+\infty$ se e solo se $b\alpha + 3 > 1$ ossia se e solo se $\alpha > -\frac{2}{b}$.
Studiamo ora la convergenza in 0. Si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(x+1)^{b\alpha+1}(x+a)^2} \sim \frac{x^\alpha}{a^2} \quad \text{per} \quad x \to 0^+$$

e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, si ha convergenza in 0 se e solo se $\alpha > -1$.

Riassumendo, visto che $b \geq 2$ e quindi $-1 \leq -\frac{2}{b}$, l'integrale improprio è convergente se e solo se $\alpha \in \left(-\frac{2}{b}, +\infty\right)$.

Passiamo ora al calcolo per $\alpha = 0$. In questo caso l'integrale è convergente perché $0 \in \left(-\frac{2}{b}, +\infty\right)$. Dobbiamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\, dx.$$

Ricordando che $a \neq 1$, dalla teoria sappiamo che vale l'identità

$$\frac{1}{(x+1)(x+a)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+a} + \frac{D}{(x+a)^2}$$

per opportune costanti reali A, B, D. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+a} + \frac{D}{(x+a)^2} &= \frac{A(x+a)^2 + B(x+1)(x+a) + D(x+1)}{(x+1)(x+a)^2} \\
&= \frac{(A+B)x^2 + (2Aa + Ba + B + D)x + Aa^2 + Ba + D}{(x+1)(x+a)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2aA + (a+1)B + D = 0 \\ a^2 A + aB + D = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = \frac{1}{(a-1)^2}$, $B = -\frac{1}{(a-1)^2}$, $D = -\frac{1}{a-1}$. Quindi

$$\frac{1}{(x+1)(x+a)^2} = \frac{1}{(a-1)^2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a} - \frac{a-1}{(x+a)^2}\right)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log|x+1| - \log|x+a| + \frac{a-1}{x+a}\right) + C \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log\left|\frac{x+1}{x+a}\right| + \frac{a-1}{x+a}\right) + C\,.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx &= \lim_{s\to+\infty}\int_0^s \frac{1}{(x+1)(x+a)^2}\,dx \\ &= \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{(a-1)^2}\left(\log\left|\frac{as+a}{s+a}\right| + \frac{a-1}{s+a} - \frac{a-1}{a}\right) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(\log a - \frac{a-1}{a}\right)\,.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = axy\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} \ , \\ y(0) = -b \end{cases}$$

specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$[(a, b) = (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{dy}{y} = \log |y| + c = \log(-y) + c.$$

Risolviamo il secondo integrale per parti:

$$\int x \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2} \int x \Big(\frac{1}{\cos^2 x}\Big)' dx = \frac{1}{2} \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + c.$$

Pertanto

$$\log(-y) = \frac{a}{2} \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{a}{2} \tan x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -b$ si ottiene $c = \log b$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -b \exp\Big(\frac{a}{2} \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{a}{2} \tan x\Big).$$

L'intervallo di definizione della soluzione è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$z\left(|z|^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\mathrm{i}\bar{z}|z|.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: $z = 0$ è soluzione dell'equazione. Per $z \neq 0$, si ponga $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, $\rho > 0$ e sostituendo nell'equazione

$$\rho e^{\mathrm{i}\theta}\left(\rho^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\mathrm{i}\rho^2 e^{-\mathrm{i}\theta} \iff e^{\mathrm{i}\theta}\left(\rho^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\rho e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\theta)}.$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho^2 + \dfrac{1}{a^2} = 2\rho \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{a} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 0, \quad z = \frac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}a}(1+\mathrm{i}), \quad z = -\frac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}a}(1+\mathrm{i}).$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 17/6/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [**8 punti**] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a\log(e^{|x-b|} - x + b)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[(a, b) = (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)]$

Svolgimento: Si ha $f(x) = ag(x-b)$ con $g(x) = \log(e^{|x|} - x)$, quindi basta studiare g.
Dominio. Il dominio di g è $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{|x|} > x\}$. Per ogni $x < 0$ si ha $e^{|x|} > 0 > x$, mentre per $x \geq 0$, essendo

$$e^0 = 1 > 0, \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x \geq 1 = \frac{d}{dx}x,$$

si ha anche $e^x > x$, e dunque $D_f = D_g = \mathbb{R}$.
Asintoti. Non ci sono asintoti verticali. Si ha

$$g(x) = \log(e^{|x|}(1 + xe^{-|x|})) = |x| + o(1) \qquad \text{per } x \to \pm\infty,$$

dunque f ha asintoti obliqui $y = \pm a(x-b)$ per $x \to \pm\infty$.
Derivabilità e derivata. Per $x \neq 0$ si ha

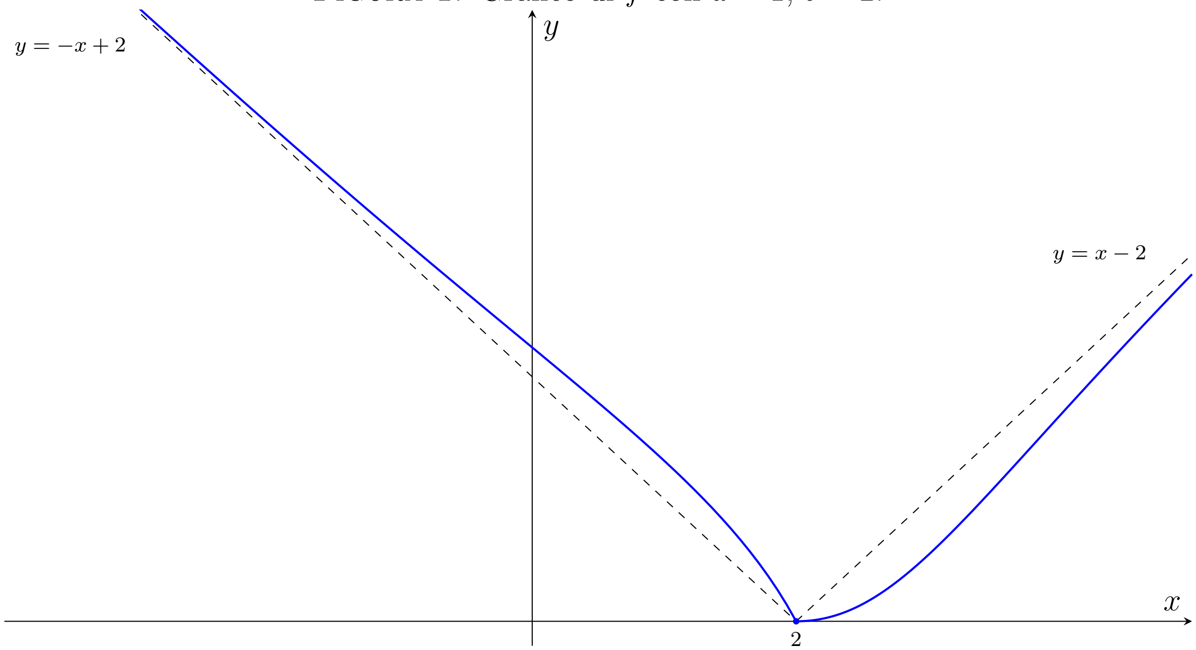
$$g'(x) = \frac{e^{|x|}\frac{x}{|x|} - 1}{e^{|x|} - x} = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x - x} & x > 0, \\ -\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}+x} & x < 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} a\frac{e^{x-b}-1}{e^{x-b}-x+b} & x > b, \\ -a\frac{e^{b-x}+1}{e^{b-x}-x+b} & x < b. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} g'(x) = \pm 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to b^+} f'(x) = 0, \quad \lim_{x\to b^-} f'(x) = -2a,$$

quindi f non è derivabile in $x = b$ (punto angoloso).
Monotonia e punti estremali. Si ha, come visto studiando il dominio, $e^{|x|} - x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre se $x > 0$ allora $e^x - 1 > 0$ e quindi $g'(x) > 0$, mentre $e^{-x} + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque $g'(x) < 0$ per $x < 0$. Quindi f è decrescente in $(-\infty, b)$ e crescente in $(b, +\infty)$ e $x = b$ è minimo assoluto.

Figura 1. Grafico di f con $a = 1$, $b = 2$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\alpha+3} x}{\cos^{a\alpha}(x)(b - \cos x)(\cos^2 x + 1)} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a, b) = (4, 3), (3, 4), (2, 5), (5, 2)]$

Svolgimento: Convergenza. Si ha in tutti i casi $b > 1$ pertanto il denominatore si può annullare solo per $x = \pi/2$. Bisogna dunque studiare la convergenza dell'integrale solo agli estremi. Detta f_α la funzione integranda, per $x \to 0^+$ si ha

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{\alpha+3}}{2(b-1)}$$

e dunque l'integrale converge in $x = 0$ se e solo se $\alpha > -4$, mentre per $x \to \frac{\pi}{2}$ si ha

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{b(\frac{\pi}{2} - x)^{a\alpha}}$$

e dunque l'integrale converge in $x = \frac{\pi}{2}$ se e solo se $\alpha < 1/a$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-4 < \alpha < 1/a$.

Calcolo per $\alpha = 0$. Facendo il cambiamento di variabile $t = \cos x$ l'integrale dato diventa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^2 - 1}{(t - b)(t^2 + 1)} dt &= \frac{1}{b^2 + 1} \int_0^1 \left[\frac{b^2 - 1}{t - b} + 2\frac{t + b}{t^2 + 1} \right] dt \\
&= \frac{1}{b^2 + 1} \left[(b^2 - 1) \log |t - b| + \log(t^2 + 1) + 2b \arctan t \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{b^2 + 1} \left[(b^2 - 1) \log \left(\frac{b - 1}{b} \right) + \log 2 + b\frac{\pi}{2} \right].
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\cos^2 y}{a^2 - x^2}, \\ y(2a) = \pi, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$[a = 4, 5, 2, 3]$

Svolgimento: Equazione a variabili separabili definitia per $x \neq \pm a$ e con soluzioni stazionarie $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In base alle condizioni iniziali l'intervallo massimale di esistenza I è contenuto in $(a, +\infty)$ e $y(x) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ per ogni $x \in I$. Separando le variabili si ottiene

$$\tan y = \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x} \right] = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x + a}{x - a} \right) + c.$$

Dalla condizione iniziale si ha $c = -\frac{1}{2a} \log 3$ e la soluzione è

$$y(x) = \arctan \left(\frac{1}{2a} \log \frac{x + a}{3(x - a)} \right) + \pi,$$

con intervallo massimale di esistenza $I = (a, +\infty)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^{ax} - x^{\sin ax}}{x^3 \log x}.$$

[$a = 5, 2, 3, 4$]

Svolgimento: Basta sviluppare il numeratore a meno di $o(x^3 \log x)$. Si ha

$$(\sin x)^{ax} - x^{\sin ax} = e^{ax \log(\sin x)} - e^{\sin ax \log(x)}$$

Inoltre

$$\sin(ax) \log x = \left(ax - \frac{a^3x^3}{6} + o(x^3)\right) \log x = ax \log x - \frac{a^3x^3}{6} \log x + o(x^3 \log x),$$

da cui

$$\begin{aligned} e^{\sin ax \log x} &= e^{ax \log x - \frac{a^3x^3}{6} \log x + o(x^3 \log x)} \\ &= 1 + ax \log x - \frac{a^3x^3}{6} \log x + \frac{1}{2} a^2x^2 \log^2 x + \frac{1}{6} x^3 \log^3 x + o(x^3 \log x). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} ax \log(\sin x) &= ax \log \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = ax \left(\log x - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= ax \log x + o(x^3 \log x), \end{aligned}$$

e pertanto

$$e^{ax \log(\sin x)} = 1 + ax \log x + \frac{1}{2} a^2x^2 \log^2 x + \frac{1}{6} x^3 \log^3 x + o(x^3 \log x).$$

Il numeratore si scrive dunque come

$$e^{ax \log(\sin x)} - e^{\sin ax \log x} = \frac{a^3x^3}{6} \log x + o(x^3 \log x)$$

e il limite richiesto è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{a^3}{6} x^3 \log x + o(x^3 \log x)}{x^3 \log x} = \frac{a^3}{6}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(z-1)^2 = -a - 2|z|$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Scrivendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione data equivale al sistema

$$\begin{cases} (x-1)^2 - y^2 = -a - 2\sqrt{x^2+y^2}, \\ 2\,(x-1)\,y = 0. \end{cases}$$

La soluzione $y = 0$ della seconda equazione non è accettabile, poiché sostituita nella prima implica $(x-1)^2 = -a - 2|x| < 0$ che è impossibile. La soluzione $x = 1$ della seconda equazione, sostituita nella prima, porge $-y^2 = -a - 2\sqrt{1+y^2}$, da cui $y^2 \geq a$, e, elevando al quadrato,

$$y^4 - 2(a+2)y^2 + a^2 - 4 = 0,$$

che ha soluzione

$$y^2 = a + 2 + 2\sqrt{a+2},$$

da cui

$$y = \pm\sqrt{a + 2 + 2\sqrt{a+2}}.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono dunque

$$z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{a + 2 + 2\sqrt{a+2}}.$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 01/09/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\sin\left(\frac{a}{n^2}\right)+e^{\frac{a}{n^2}}+\cos\left(\frac{2\sqrt{a}}{n}\right)-2\right)+7^n\log n}{n!\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4+n\cos(3n)}$$

$[a=5,4,3,2]$

Svolgimento: $n!$ è un infinito di ordine superiore rispetto a ogni esponenziale ossia

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad \text{per ogni } a>0$$

Di conseguenza, per ogni $k\in\mathbb{N}$ si ha

$$\frac{7^n\log n}{n!}=o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad \frac{7^n\log n}{n!}=o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{e} \quad \frac{n\cos(3n)}{n!}=o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

D'altra parte da

$$\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^3)\\
\arctan x &= x+o(x^2)
\end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{a}{n^2})+e^{\frac{a}{n^2}}+\cos(\frac{2\sqrt{a}}{n})-2 &= \frac{a}{n^2}+1+\frac{a}{n^2}+\frac{a^2}{2n^4}+1-\frac{2a}{n^2}+\frac{16a^2}{24n^4}-2+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&= \frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4=\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)+7^n\log n}{n!\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4+n\cos(3n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)+\frac{7^n\log n}{n!}}{\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4+\frac{n\cos(3n)}{n!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4+\frac{n\cos(3n)}{n!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{7}{6}\frac{a^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)} \\
&= \frac{7}{6}a^2\,.
\end{aligned}
$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a,b) = (1,1),(2,1),(1,2),(2,3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> In tutti i casi $a > 0$ e $b > 0$. Il dominio di f è

$$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\} = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right).$$

Inoltre f è continua in $\mathrm{dom} f$.

$f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ quindi $(0,0)$ è l'unico punto di intersezione del f con gli assi Cartesiani. Inoltre,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (ax+b > 0) \wedge (x \neq 0) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty).$$

Consideriamo ora i possibili asintoti.

$$\lim_{x \to -\frac{b}{a}} \left| \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} \right| = \left| \frac{b/a}{0} \right| = +\infty$$

e quindi, tenendo conto del segno di f, si trova

$$\lim_{x \to -\frac{b}{a}^+} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\frac{b}{a}^-} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} = -\infty.$$

Di conseguenza la retta di equazione $x = -\frac{b}{a}$ è un asintoto verticale sia da destra che da sinistra. Inoltre,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{ax+b} = 0^{\pm}.$$

e quindi, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Studiamo ora la derivabilità, la monotonia e i punti di massimo e minimo locali e globali. f è chiaramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}, 0\}$ e quindi

$$\mathrm{dom} f' \supset \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty).$$

Inoltre, per ogni $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{2}} \frac{x}{|x|}(ax+b) - a|x|^{\frac{1}{2}}}{(ax+b)^2} \\ &= \frac{x(b-ax)}{2|x|^{\frac{3}{2}}(ax+b)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo la derivabilità di f per $x = 0$. Si ha

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \frac{|h|^{\frac{1}{2}}}{ah+b} = +\infty$$

e

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} \frac{|h|^{\frac{1}{2}}}{ah+b} = -\infty\,.$$

Quindi 0 è un punto di cuspide e

$$\mathrm{dom} f' = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \cup \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \cup (0, +\infty)\ .$$

Determiniamo ora i punti critici e gli inervalli di monotonia. Per $x \in \mathrm{dom} f'$ abbiamo

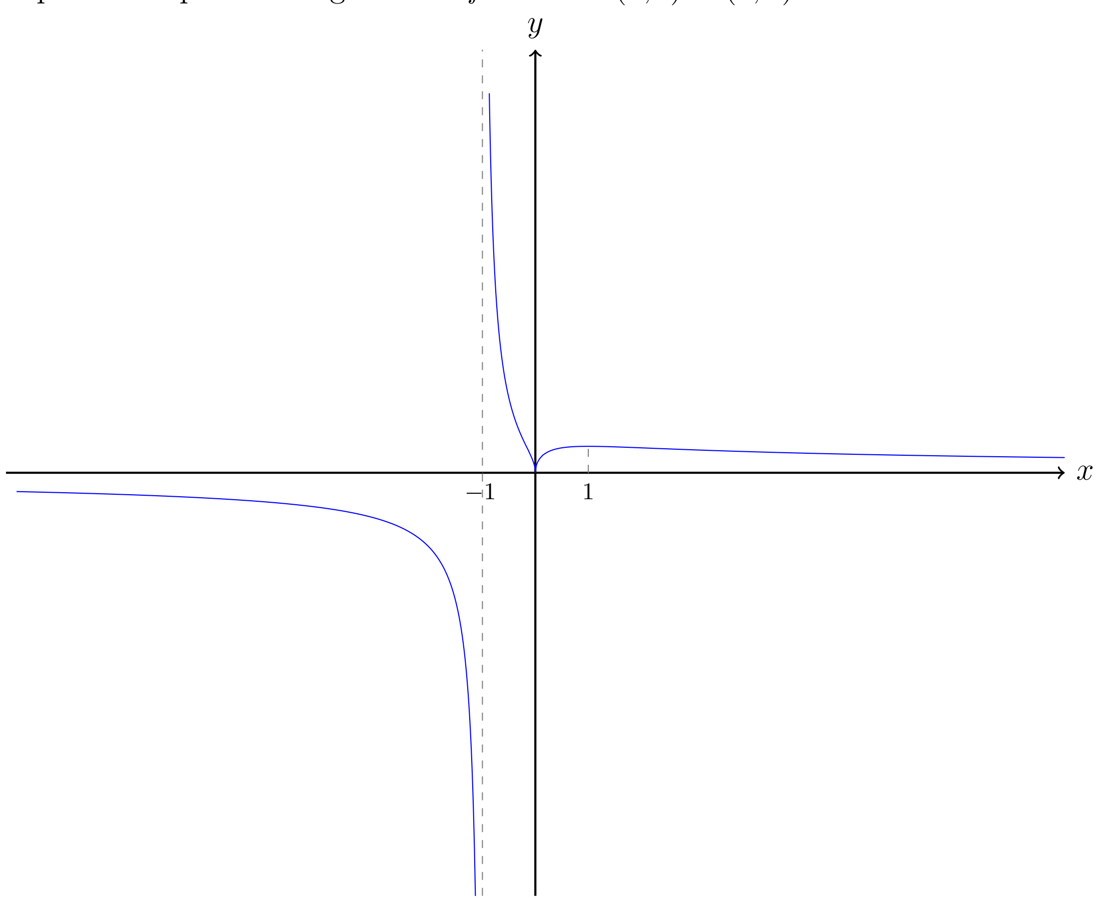
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(b-ax) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

e quindi $\frac{b}{a}$ è l'unico punto critico di f. Inoltre,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x(b-ax) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{b}{a}\right).$$

Di conseguenza, f è strettamente crescente in $\left(0, \frac{b}{a}\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, in $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e in $\left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$. Di conseguenza 0 è un punto di minimo locale $f(0) = 0$ è il corrispondente valore di minimo locale. Inoltre, $\frac{b}{a}$ è un punto di massimo locale e $f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ è il corrispondente valore di massimo locale. Non esistono punti di massimo o di minimo globale visto che la funzione non è limitata né inferiormente né superiormente,

Riportiamo qui sotto il grafico di f nel caso $(a,b) = (1,1)$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)e^{-\alpha x}}{x^{2+b\alpha}}\,dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a,b) = (1,2),(2,1),(1,3),(3,1)]$

Svolgimento: In tutti i casi abbiamo $a > 0$ e $b > 0$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è continua e positiva in $[1,+\infty)$. Basta quindi studiare la convergenza a $+\infty$.

Utilizziamo il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\frac{\arctan(ax^2)e^{-\alpha x}}{x^{2+b\alpha}} \sim \frac{\pi}{2}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{2+b\alpha}} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Quindi l'integrale improprio convergente se e solo se $\alpha \geq 0$.

Calcolo per $\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$ l'integrale improprio è convergente. Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(ax)}{x^2}\,dx &= -\int \arctan(ax)\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{\arctan(ax)}{x} + \int \frac{a}{x+a^2x^3}\,dx\end{aligned}$$

Dalla teoria sappiamo che

$$\frac{1}{x+a^2x^3} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+a^2x^2}$$

per opportune costanti reali A, B, D. Visto che

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+a^2x^2} = \frac{A + Dx + (a^2A+B)x^2}{x+a^2x^3}$$

si deve avere $A = 1$, $D = 0$ e $B = -a^2$. Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int \frac{a}{x+a^2x^3}\,dx &= \int \frac{a}{x}\,dx - \int \frac{a^3x}{1+a^2x^2}\,dx \\ &= a\log|x| - \frac{a}{2}\log(1+a^2x^2) + C \\ &= \frac{a}{2}\log\frac{x^2}{1+a^2x^2} + C\,.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^2}\,dx &= \lim_{s\to+\infty}\left(\arctan(a) - \frac{\arctan(as)}{s} + \frac{a}{2}\left(\log\frac{s^2}{1+a^2s^2} - \log\frac{1}{1+a^2}\right)\right) \\ &= \arctan(a) + \frac{a}{2}\left(\log\frac{1}{a^2} - \log\frac{1}{1+a^2}\right) \\ &= \arctan(a) + \frac{a}{2}\log\frac{1+a^2}{a^2}\,.\end{aligned}$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 4. [**5 punti**] Determinare il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$\frac{\log(b + x^2 + x^3)}{a + \sin(x^2)}.$$

$[a = (2,2), (-2,3), (-2,2), (2,3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> In tutti i casi $a \neq 0$ e $b > 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
\log(b + x^2 + x^3) &= \log b + \log\left(1 + \frac{x^2 + x^3}{b}\right) = \log b + \frac{x^2 + x^3}{b} - \frac{(x^2 + x^3)^2}{2b^2} + o(x^4) \\
&= \log b + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b} - \frac{x^4}{2b^2} + o(x^4) \\
\sin(x^2) &= x^2 + o(x^5) \\
\frac{1}{a + \sin(x^2)} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 + \frac{\sin(x^2)}{a}}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{a} + o(x^5)}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\log(b + x^2 + x^3)}{a + \sin(x^2)} &= \left(\log b + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b} - \frac{x^4}{2b^2} + o(x^4)\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{\log b}{a} + \left(\frac{1}{ab} - \frac{\log b}{a^2}\right)x^2 + \frac{x^3}{ab} + \left(\frac{\log b}{a^3} - \frac{1}{2ab^2} - \frac{1}{a^2 b}\right)x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

e di conseguenza il polinomio richiesto è

$$\frac{\log b}{a} + \left(\frac{1}{ab} - \frac{\log b}{a^2}\right)x^2 + \frac{x^3}{ab} + \left(\frac{\log b}{a^3} - \frac{1}{2ab^2} - \frac{1}{a^2 b}\right)x^4$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$|z|^3 z + a|z|z = a^2\sqrt{2} + ia^2\sqrt{2}.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: In tutti i casi $a > 0$. Poniamo $r = |z|$, $z = re^{i\varphi}$. Visto che $a^2\sqrt{2} + ia^2\sqrt{2} = 2a^2 e^{i\frac{\pi}{4}}$ l'equazione diventa

$$(r^4 + ar^2)e^{i\varphi} = 2a^2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

che è soddisfatta se e solo se

$$r^4 + ar^2 = 2a^2 \quad \text{e} \quad e^{i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Da $r^4 + ar^2 = 2a^2$ segue che $r^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+8a^2}}{2} = a$. Di conseguenza $r = \sqrt{a}$. Quindi l'unica soluzione dell'equazione è $z = \sqrt{\frac{a}{2}} + i\sqrt{\frac{a}{2}}$.

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 02/09/2024

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$x^2 + e^{|x^2-a|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}} dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 6z) = 5 \qquad \left[z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 3z) = 2\right].$$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)^{n^2} \cdot \left(e^{-\frac{b}{a}n} + \frac{1}{n!}\right)$$

$[(a, b, c) = (2, 3, 3), (3, 2, 2), (4, 5, 3), (5, 4, 3)]$

Esercizio 5. [6 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \frac{\log^2 a - \log^2 x}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^\alpha} dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$x^2 + e^{|x^2-a|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

[$a = (2, 3, 4, 5)$]

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. f pari. Risulta:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Risulta

$$f'(x) = 2x(1 - e^{a-x^2}) \text{ per } 0 \le x < \sqrt{a}, \qquad f'(x) = 2x(1 + e^{x^2-a}) \text{ per } x > \sqrt{a}.$$

Pertanto f è decrescente per $0 \le x \le \sqrt{a}$, f è crescente per $x \ge \sqrt{a}$.

$\boxed{x = 0 \text{ punto di massimo relativo, } x = \sqrt{a} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre:

$$f'_-(\sqrt{a}) = 0, \quad f'_+(\sqrt{a}) = 4\sqrt{a}.$$

$\boxed{x = \sqrt{a} \text{ punto angoloso.}}$

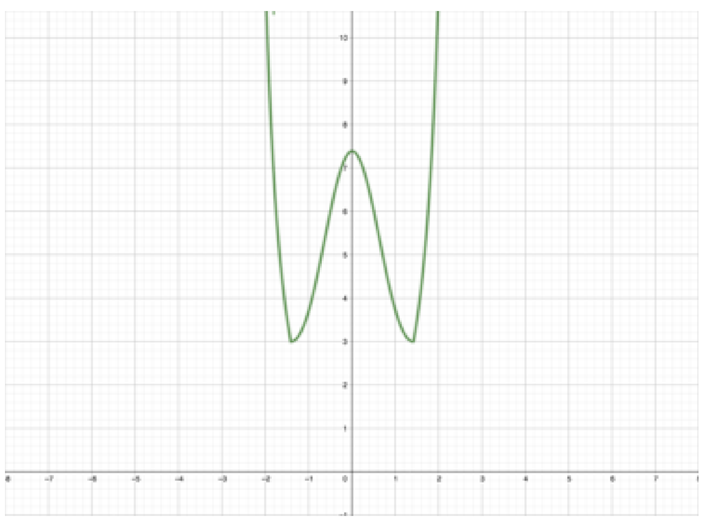


FIGURA 1. Grafico per $a = 2$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}}dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Integrando per parti:

$$\int \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}}dx = 2\int \log x \left(\frac{1}{(3a-x)^{1/2}}\right)' dx = 2\frac{\log x}{(3a-x)^{1/2}} - 2\int \frac{1}{x(3a-x)^{1/2}}dx.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale: con la sostituzione $t = (3a-x)^{1/2}$

$$\int \frac{1}{x(3a-x)^{1/2}}dx = -\int \frac{2}{3a-t^2}dt = -\frac{1}{\sqrt{3a}}\int \left(\frac{1}{\sqrt{3a}-t} + \frac{1}{\sqrt{3a}+t}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3a}}\log\left(\frac{\sqrt{3a}+t}{\sqrt{3a}-t}\right) + c.$$

Pertanto si conclude:

$$\int \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}}dx = \frac{2\log x}{(3a-x)^{1/2}} + \frac{2}{\sqrt{3a}}\log\left(\frac{\sqrt{3a}+(3a-x)^{1/2}}{\sqrt{3a}-(3a-x)^{1/2}}\right) + c$$

da cui segue

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a-x)^{3/2}}dx = \frac{2\log(2a)}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{3a}}\log\left(\frac{\sqrt{3a}+\sqrt{a}}{\sqrt{3a}-\sqrt{a}}\right) - \frac{2\log a}{\sqrt{2a}} - \frac{2}{\sqrt{3a}}\log\left(\frac{\sqrt{3a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{3a}-\sqrt{2a}}\right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 6z) = 5 \qquad \left[z^2 + \mathrm{Im}(z^2 \pm 3z) = 2\right].$$

Svolgimento: Risolviamo l'equazione: $z^2 + \mathrm{Im}(z^2 + 6z) = 5$. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, si ha:

$$z^2+\mathrm{Im}(z^2+6z) = 5 \Longleftrightarrow x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+\mathrm{Im}(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+6x+6\mathrm{i}y) = 5 \Longleftrightarrow x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+2xy+6y = 5$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 6y = 5 \\ xy = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 6y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x^2 = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1, 5 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = \sqrt{5}, -\sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$z = \sqrt{5}, \quad z = -\sqrt{5}, \quad z = \mathrm{i}, \quad z = 5\mathrm{i}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)^{n^2}\cdot\left(e^{-\frac{b}{a}n}+\frac{1}{n!}\right).$$

$[(a,b,c)=(2,3,3),(3,2,2),(4,5,3),(5,4,3)]$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)&=\log\left(1+\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}\right)=\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}-\frac{b^2}{2a^2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)^{n^2}&=\exp\left(n^2\log\left(\frac{an^2+bn+c}{an^2}\right)\right)=\exp\left(n^2\left(\frac{b}{an}+\frac{c}{an^2}-\frac{b^2}{2a^2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{b}{a}n+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}+o(1)\right)\\&=e^{\frac{b}{a}n}e^{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}}(1+o(1)).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$e^{-\frac{b}{a}n}+\frac{1}{n!}=e^{-\frac{b}{a}n}(1+o(1)).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$e^{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**6 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \frac{\log^2 a - \log^2 x}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^\alpha} dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim -\frac{\log^2 x}{a^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{a}{2}]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'altra parte, posto $y = a - x$,

$$f(x) = \frac{\log^2 a - \log^2(a-y)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{a-y}\right)^\alpha}.$$

Per $y \to 0^+$ risulta

$$\log^2(a-y) = \left(\log a + \log\left(1 - \frac{y}{a}\right)\right)^2 = \left(\log a - \frac{y}{a} + o(y)\right)^2 = \log^2 a - 2\frac{\log a}{a} y + o(y)$$

$$\sqrt{a-y} = \sqrt{a}\sqrt{1 - \frac{y}{a}} = \sqrt{a}\left(1 - \frac{y}{2a} + o(y)\right) = \sqrt{a} - \frac{\sqrt{a}}{2a} y + o(y).$$

Pertanto

$$\frac{\log^2 a - \log^2(a-y)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{a-y}\right)^\alpha} \sim 2^{\alpha+1} a^{\frac{\alpha}{2}-1} \log a \, y^{1-\alpha} \text{ per } y \to 0^+.$$

Si deduce che

$$f(x) \sim 2^{\alpha+1} a^{\frac{\alpha}{2}-1} \log a \,(a-x)^{1-\alpha} \text{ per } x \to a^-.$$

Pertanto f è integrabile in $[\frac{a}{2}, a)$ se e solo se $\alpha < 2$. Segue che f è integrabile in $(0, a)$ se e solo se $\alpha < 2$.

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13 settembre 2024

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(|a - \log(x^2)|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Lo studio della derivata seconda non è necessario.
$[a = 1, 2, -1, -2]$

Svolgimento:

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Simmetria: funzione pari, pertanto possiamo limitarci a studiare la funzione per $x > 0$.
Segno: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \neq 0$.
Ora

$$a - \log(x^2) = a - 2\log(x) \geq 0 \iff \log(x) \leq a/2 \iff x \leq \exp(a/2).$$

Riassumendo

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(a - 2\log(x)) & \text{se } 0 < x \leq \exp(a/2) \\ \arctan(2\log(x) - a) & \text{se } \exp(a/2) < x. \end{cases}$$

La funzione è continua nel suo dominio.
Limiti di frontiera (e asintoti): abbiamo che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

pertanto f ha come asintoto orizzontale $y = \pi/2$.
Derivabilità: f è derivabile per ogni x nel dominio eccetto il caso $x = \pm\exp(a/2)$ che deve essere studiato a parte. La derivata vale:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x(1 + (a - 2\ln(x))^2)} & \text{se } 0 < x \leq \exp(a/2) \\ \dfrac{2}{x(1 + (a - 2\ln(x))^2)} & \text{se } \exp(a/2) < x. \end{cases}$$

Monotonia: La funzione è decrescente in $(0, \exp(a/2))$ e crescente per $x > \exp(a/2)$.
Massimi e minimi: Il punto $x = \exp(a/2)$ è un punto di minimo (assoluto) dove la funzione vale 0.

Punti di non derivabilità: Si ha che $\exp(a/2)$ è un punto angoloso poiché

$$\lim_{x\to\exp(a/2)^-} f'(x) = -2\exp(-a/2) \qquad \lim_{x\to\exp(a/2)^+} f'(x) = 2\exp(-a/2).$$

Il punto $x = 0$ non appartiene al dominio di f ma se estendessimo per continuità f sarebbe una cuspide.

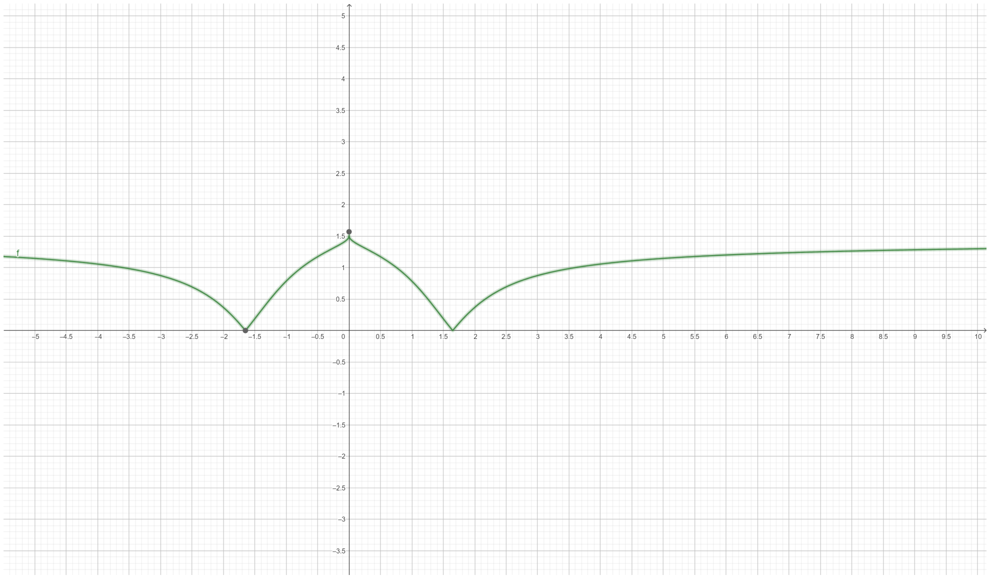


FIGURE 1. Grafico di f per $a = 2$

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{t(\ln(\alpha)+\ln(t))}{(1+\alpha^2t^2)^2}dt.$$

$[\alpha = e^{1/2}, e, e^{-1}, e^{-1/2}]$

Svolgimento: Il coefficiente α si può supporre 1 tramite un cambio di variabile. Mostriamo il procedimento con $\alpha = 1$. Il risultato sarà lo stesso per tutte le versioni.
Le funzioni sono continue per ogni $t > 0$. L'integrale è improprio ai due estremi. Consideriamo $0 < a < b < +\infty$. Facciamo un' integrazione per parti con
$$f'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2} \implies f(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$
e
$$g(t) = \ln(t) \implies g'(t) = \frac{1}{t}.$$
Abbiamo
$$\int \frac{t\ln(t^2)}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{\ln(t)}{1+t^2} + \int \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$
Ora, la funzione razionale si decompone secondo la formula
$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$
Identificando abbiamo che $A = 1, B = -1, C = 0$, ovvero
$$\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}dt = \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c$$
Calcoliamo la primitiva così ottenuta in $0 < a < b$ e consideriamo i limiti
$$\lim_{b\to+\infty} -\frac{\ln(b)}{1+b^2} + \ln\left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) = 0$$
e
$$\lim_{a\to 0^+} \frac{\ln(a)}{1+a^2} - \ln(a) + \frac{1}{2}\ln(1+a^2) = \lim_{a\to 0^+} \ln(a)\left(\frac{1}{1+a^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln(1+a^2) = 0.$$
Concludiamo
$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{(1+t^2)^2}dt = 0.$$

Esercizio 3. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} y(t) + \sin(t), \\ y(a) &= 1, \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

$[a = -\pi/3, -\pi/4, -\pi/6, -3\pi/4]$

Svolgimento: La soluzione generale y_h dell'equazione omogenea si determina integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt \iff \ln|y| = \ln|\sin(t)| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pertanto $y_h = c\sin(t)$. Per determinare la soluzione generale useremo il metodo della variazione delle costanti. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \left(t - a + \frac{1}{\sin(a)}\right) \sin(t).$$

L'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $(-\pi, 0)$.

Esercizio 4. **[5 punti]** Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

Svolgimento: Le differenti versioni si ottengono da questa sopra (A) sostituendo z con iz, $-iz$, $-z$ per ottenere le versioni B, C, D rispettivamente.
Poniamo $w = \frac{z+1}{z-1}$. Le radici quarte dell' unità, soluzione di $w^4 = 1$, sono

$$\exp(ik\frac{\pi}{2}) \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3.$$

Ora per $k = 0$ abbiamo $w = 1$ che non può essere soluzione poiché $\frac{z+1}{z-1} = 1$ non ha soluzione. Per $k = 1, 2, 3$ abbiamo che $w = \frac{z+1}{z-1}$ implica $z = \frac{w+1}{w-1}$. Pertanto le soluzioni sono della forma

$$\frac{e^{i\theta_k}+1}{e^{i\theta_k}-1}, \quad \text{per } k = 1, 2, 3,$$

dove $\theta_k = k\pi/2$, ovvero $\pi/2, \pi, 3\pi/2$. Semplificando avremo tre soluzioni: $i, 0, -i$.

Esercizio 5. [5 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+ax^2) - x\arctan(ax)}{x\arcsin^3(x)}$$

[a=2,3,4,5]

Svolgimento:

Cominciamo sviluppando il denominatore: abbiamo

$$\arcsin(x) = x + o(x) \implies x\arcsin^3(x) = x^4 + o(x^4), \qquad \text{per } x \to 0.$$

Basterà, pertanto, sviluppare il numeratore all' ordine 4. Si ha

$$\log(1+ax^2) = ax^2 - \frac{a^2x^4}{2} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0$$

e

$$\arctan ax = ax - \frac{(ax)^3}{3} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto

$$\frac{\log(1+ax^2) - x\arctan(ax)}{x\arcsin^3(x)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + o(1),$$

per $x \to 0$.

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/09/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{c}{2}x^2} - \cos(\sqrt{c}\,x)}{\left[a\left(\operatorname{sen}\sqrt{bx} - \sqrt{bx}\right)\right]^2 - b[\log(1+x)]^3}$$

$[(a,b,c) = (2,3,2),\ (2,3,3),\ (3,2,2),\ (3,2,3)]$

Svolgimento: Studieremo qui di seguito il caso $(a,b,c) = (2,3,2)$.

NUMERATORE:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}(-x^2)^2 + o(x^4)$$
$$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2 + \tfrac{1}{4!}(\sqrt{2}x)^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\text{Numeratore} \;=\; \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4!}(\sqrt{2})^4\right] x^4 + o(x^4) = \tfrac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

DENOMINATORE:

$$\left[2(\operatorname{sen}\sqrt{3x} - \sqrt{3x})\right]^2 \;=\; 4\left(\sqrt{3x} - \frac{1}{6}(3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{120}(3x)^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}) - \sqrt{3x}\right)^2 = 3x^3 - \frac{9}{10}x^4 + o(x^4),$$

$$3\,[\log(1+x)]^3 \;=\; 3\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\text{Denominatore} = 3x^3 - \frac{9}{10}x^4 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{18}{5}x^4 + o(x^4).$$

RIASSUMENDO: il limite proposto è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{18}{5}x^4 + o(x^4)} = \frac{5}{54}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}}\sqrt{b(x-a)^2 + x - a}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (1, 3), (-1, 3), (1, 4), (-1, 4)]$

Svolgimento: Si ha $f(x) = g(x-a)$ con $g(x) := e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2 + x}$, e dunque il grafico di f è il grafico di g traslato a destra di a. Studiamo dunque la funzione g.
Poiché $bx^2 + x = x(bx + 1) \geq 0$ equivale a $x \leq -\frac{1}{b}$ o $x \geq 0$, il dominio di g è $D_g = (-\infty, -\frac{1}{b}] \cup (0, +\infty)$, e quello di f è $D = (-\infty, a - \frac{1}{b}] \cup (a, +\infty)$. Inoltre chiaramente $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = a - \frac{1}{b}$.
Si ha poi

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2 + x} = 0,$$

e dunque il punto $x = a$ è di discontinuità eliminabile per f; inoltre per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{bx^2 + x} &= \pm\sqrt{b}x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sqrt{1 + \frac{1}{bx}} \\ &= \pm\sqrt{b}x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2bx} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \pm\sqrt{b}\left(x - 1 + \frac{1}{2b}\right) + o(1), \end{aligned}$$

e dunque le rette di equazione $y = \pm\sqrt{b}(x - a - 1 + \frac{1}{2b})$ sono asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ per f.
La derivata di g è, per $x \in (-\infty, -\frac{1}{b}) \cup (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2}\sqrt{bx^2 + x} + \frac{2bx + 1}{2\sqrt{bx^2 + x}}\right] = e^{-\frac{1}{x}}\frac{2(bx^2 + x) + x^2(2bx + 1)}{2x^2\sqrt{bx^2 + x}} \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2 + (2b + 1)x + 2}{2x\sqrt{bx^2 + x}}, \end{aligned}$$

ed essendo

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{b})^-} e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2 + (2b + 1)x + 2}{2x\sqrt{bx^2 + x}} = -\infty,$$

si ha che $x = a - \frac{1}{b}$ è un punto a tangente verticale per il grafico di f, mentre essendo chiaramente

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\frac{2bx^2 + (2b + 1)x + 2}{2x\sqrt{bx^2 + x}} = 0,$$

ponendo $f(a) := 0$ si otterrebbe una funzione continua e derivabile in $x = a$ con $f'(a) = 0$.
Le radici del polinomio $2bx^2 + (2b + 1)x + 2$ sono

$$x = \frac{-2b - 1 \pm \sqrt{4b^2 - 12b + 1}}{4b}$$

($4b^2 - 12b + 1 > 0$ per $b = 3, 4$), e poiché

$$\frac{-2b - 1 + \sqrt{4b^2 - 12b + 1}}{4b} < -\frac{1}{b} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{4b^2 - 12b + 1} < 2b - 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 < 9$$

si ha che g' è negativa in $(-\infty, \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, -\frac{1}{b})$, mentre è positiva in $(\frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, \frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(0, +\infty)$. Dunque f è decrescente in $(-\infty, a + \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$

e in $(a+\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, a-\frac{1}{b})$, mentre è crescente in $(a+\frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, a+\frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b})$ e in $(a,+\infty)$ e pertanto i punti

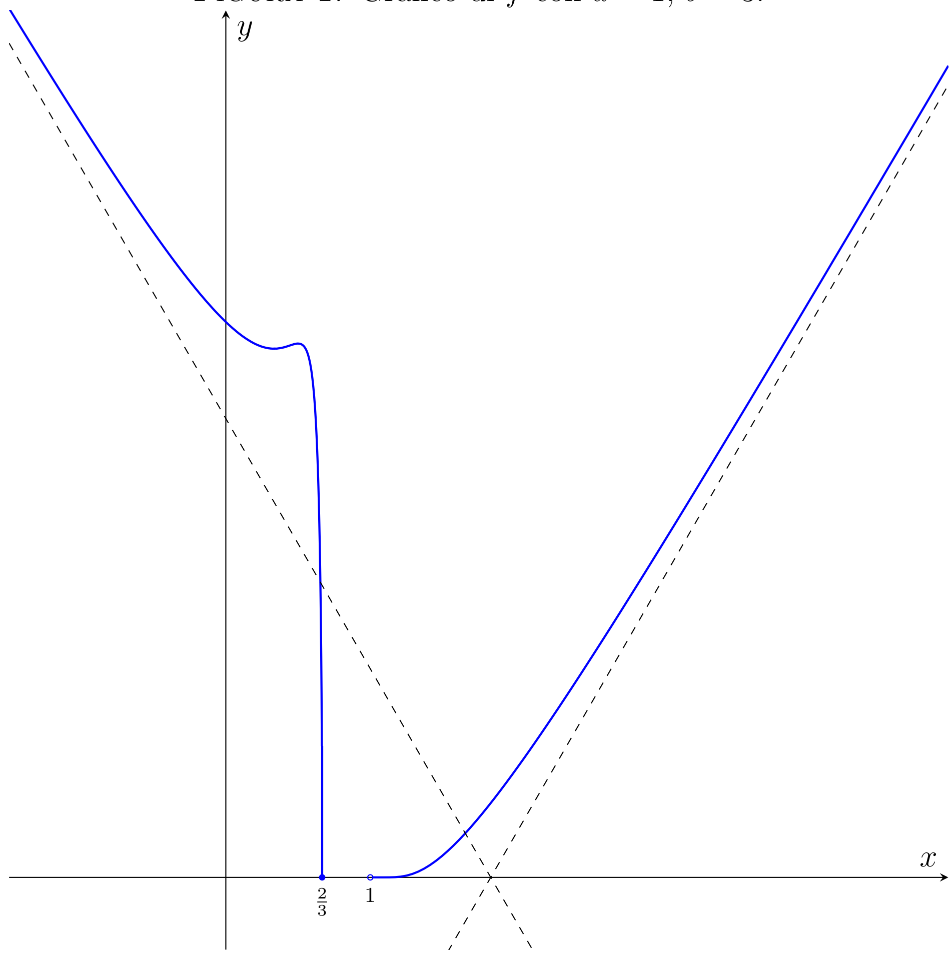
$$x = a + \frac{-2b-1-\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}, \quad x = a - \frac{1}{b}, \quad (\text{e } x = a \text{ per la funzione estesa}),$$

sono punti di minimo relativo e assoluto rispettivamente, mentre il punto

$$x = a + \frac{-2b-1+\sqrt{4b^2-12b+1}}{4b}$$

è di massimo relativo (ma non assoluto in quanto $\sup_D f = +\infty$).

Figura 1. Grafico di f con $a=1$, $b=3$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [7 punti] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_a^{\infty} \frac{(x-a)^{3-\alpha^{2b}}}{e^{\alpha x^3+(x-a)^2}}\,dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[(a,b) = (2,3), (3,2), (-1,3), (-1,2)]$

Svolgimento: Svolgeremo il caso $(a,b) = (2,3)$ e chiameremo f_α la funzione integranda.

CONVERGENZA:

- Convergenza all'infinito:
  - se $\alpha < 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$, quindi l'integrale diverge;
  - se $\alpha \geq 0$ allora
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}} = 0.$$
  Poiché $\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx < +\infty$, possiamo concludere che l'integrale converge all'infinito per il criterio del confronto.
- Convergenza nell'eventuale polo 2:
  Osserviamo che
  $$\lim_{x\to2^+} \frac{f_\alpha(x)}{(x-2)^{3-\alpha^6}} = c_\alpha \in (0,+\infty) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$
  Quindi per il criterio del confronto asintotico si ha convergenza se e solo se converge l'integrale $\int_2^3 (x-2)^{3-\alpha^6}dx$, ovvero
  $$3-\alpha^6 > -1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha^6 < 4 \quad\Longrightarrow\quad -\sqrt[3]{2} < \alpha < \sqrt[3]{2}.$$

Riassumendo:

$$\text{l'integrale converge} \quad\Longleftrightarrow\quad 0 \leq \alpha < \sqrt[3]{2}.$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE PER $\alpha = 0$:

Eseguendo i cambiamenti di variabile $x - 2 = t$ e $t^2 = s$, si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{(x-2)^3}{e^{(x-2)^2}}\,dx = \int_0^{+\infty} t^3\cdot e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} se^{-s}ds = \frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left[-(s+1)e^{-s}\right]_0^c = \frac{1}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ax(1+y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza di y.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento:

$$y' = ax(1+y^2) \;\Leftrightarrow\; \frac{y'}{1+y^2} = ax \;\Leftrightarrow\; \arctan y = \frac{a}{2}x^2 + C.$$

$y(0) = 0$ implica che $C = 0$, quindi $\arctan y = \frac{a}{2}x^2$. Perciò $y(x) = \tan(\frac{a}{2}x^2)$. L'intervallo massimale di esistenza contenente $x = 0$ è determinato da $-\frac{1}{2}\pi < \frac{a}{2}x^2 < \frac{1}{2}\pi$, ovvero l'intervallo è $(-\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \sqrt{\frac{\pi}{a}})$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$z^3 + 2z^2 + iz = 0 \quad \left[z^3 + 2z^2 \pm iz = 0, \quad z^3 - 2z^2 \pm iz = 0 \right].$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: $z^3 + 2z^2 + iz = z(z^2 + 2z + i) = 0$ ovvero $z = 0$ o $z^2 + 2z + i = 0$:

$$z^2 + 2z + i = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -1 \pm w \text{ dove } w \text{ è una delle due soluzioni di } w^2 = 1 - i.$$

Per esempio: $w = \sqrt[4]{2}(\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)))$.

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 11/07/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [**8 punti**] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = be^{ax}(e^x - 1)^{1/3}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
$[a = \pm 1,\ b = \pm 1]$

Svolgimento:

Studiamo il caso $a = -1$, $b = 1$:

$$f(x) = e^{-x}(e^x - 1)^{1/3}.$$

`Dominio:` $\mathbb{R}$.

`Segno:` $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x = 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$.

`Asintoti:` si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

per cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$.
Non ci sono asintoti obliqui dato che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

`Intervalli di monotonia:` per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{e^{-x}\ (3 - 2\,e^x)}{3\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}} \qquad x \neq 0.$$

Quindi $f'(x) < 0$ per $x < \log\frac{3}{2}$ e $x \neq 0$ mentre $f'(x) < 0$ per $x > \log\frac{3}{2}$ e si ha $f'(\log\frac{3}{2}) = 0$.
Abbiamo allora che la funzione è monotona crescente nell'intervallo $(-\infty, \log\frac{3}{2})$ mentre è monotona decrescente in $(\log\frac{3}{2}, +\infty)$.

`Eventuali punti di massimo/minimo relativo:` Vi è un massimo relativo ed assoluto nel punto $x_M = \log\frac{3}{2}$, con $f(x_M) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

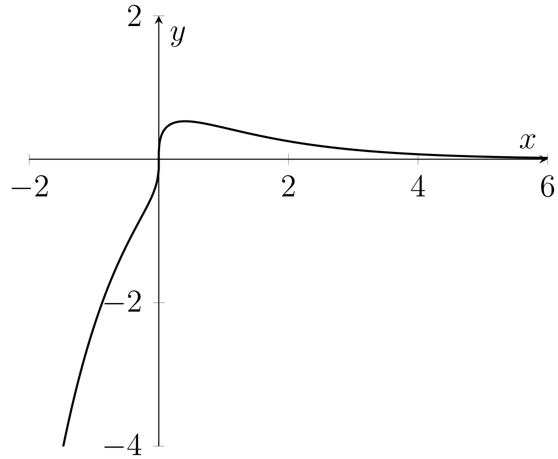
`Eventuali punti di non derivabilità:` possiamo calcolare $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = +\infty$, pertanto possiamo concludere che in $x = 0$ abbiamo un punto di non derivabilità con tangente verticale.

`Intervalli di concavità/convessità (anche se non richiesti):` per $x \neq 0$, si ha

$$\frac{4\,e^{2\,x} - 15\,e^{x} + 9}{9e^{x}\sqrt[3]{(e^{x}-1)^{2}}\;(e^{x}-1)},$$

studiandone il segno vediamo che la funzione è concava in $(-\infty, \log(3/4)) \cup (0, \log 3)$ e convessa in $(\log(3/4), 0) \cup (\log 3, \infty)$. Pertanto ha un flesso, a tangente verticale, in $x = 0$ ed un altro, a tangente obliqua, in $x = \log 3$.

Figura 1. Grafico di f con $a = -1$, $b = 1$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2a}} \frac{x \text{ arcsen}\sqrt{1-ax}}{\sqrt{1-ax}}\, dx.$$

$[a = \pm 2, \pm 3]$

Svolgimento: In questo svolgimento poniamo I il valore dell'integrale proposto.
Operando la sostituzione $ax = t$, risulta

$$I = \frac{1}{a^2}\int_0^{1/2} \frac{t \,\text{arcsen}\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}}\, dt.$$

Poniamo adesso $\sqrt{1-t} = s$ e troviamo

$$I = -\frac{2}{a^2}\int_1^{1/\sqrt{2}} (1-s^2)\,\text{arcsen}\, s\, ds = \frac{2}{a^2}\int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-s^2)\,\text{arcsen}\, s\, ds.$$

Sostituiamo $s = \text{sen}\, y$, ovvero $y = \arcsin s$, ed otteniamo

$$I = \frac{2}{a^2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} y\,(1-\text{sen}^2\, y)\,\cos y\, dy.$$

Integriamo adesso per parti ed abbiamo

$$I = \frac{2}{a^2}\left\{\left[y\,(\text{sen}\, y - \tfrac{1}{3}\,\text{sen}^3\, y)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\text{sen}\, y - \tfrac{1}{3}\,\text{sen}^3\, y)dy\right\}.$$

Poiché

$$\int \text{sen}^3\, y\, dy = \int (1-\cos^2 y)\,\text{sen}\, y\, dy = -\cos y + \tfrac{1}{3}\cos^3 y + c \qquad c\in\mathbb{R},$$

deduciamo

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{2}{a^2}\left[y\,(\text{sen}\, y - \tfrac{1}{3}\,\text{sen}^3\, y) + \cos y + \tfrac{1}{3}\left(-\cos y + \tfrac{1}{3}\cos^3 y\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \tfrac{2}{a^2}\left[\tfrac{\pi}{2}\left(1-\tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{6\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{6\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \tfrac{2}{a^2}\left[\tfrac{\pi}{3} - \left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{3}\right)\tfrac{5}{6\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]. \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[5 punti]** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2\,\bar{z}^{-1} + a\,\bar{z}\,z^{-1} = 0.$$

[$a = 2, 3, 4, 5$]

Svolgimento:
Dato che $z = 0$ non è soluzione posso riscrivere l'equazione nel modo seguente:

$$z^2\,\bar{z}^{-1}(\bar{z}\,z^{-1})^{-1} = -a \quad \text{ovvero} \quad z^3\bar{z}^{-2} = -a.$$

Utilizzando la rappresentazione di Eulero per z, $z = \rho e^{\theta i}$, si ha

$$\rho e^{5\theta i} = -a,$$

da cui $\rho = a$ e $\theta_k = (2k-1)\dfrac{\pi}{5}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Pertanto $z_k = ae^{\theta_k i}$, per $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio converge:

$$\int_a^{+\infty} \left(x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} \right)^\alpha dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Osserviamo che la convergenza va verificata soltanto a $+\infty$. Inoltre, possiamo scrivere

$$x^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt[a]{x}} \cos e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt[a]{x}}(1 - \cos e^{-ax}).$$

Dato che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos e^{-ax}}{2e^{-2ax}} = 1,$$

per il principio del confronto asintotico ci possiamo ricondurre a studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è integrabile all'infinito la funzione $\left(\frac{1}{\sqrt[a]{x}} e^{-2ax} \right)^\alpha$.

Possiamo quindi concludere che se $\alpha > 0$ allora l'integrale converge mentre se $\alpha \leq 0$ allora l'integrale diverge.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [7 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 + \log(\cos x)}.$$

[$a = \pm 3, \pm 5$]

Svolgimento: Valutiamo in prima battuta l'andamento asintotico del numeratore e del denominatore e poi ne valutiamo il rapporto.

Numeratore: sviluppando il logaritmo per $x \to 0$,

$$\log(1+ax) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

quindi tenendo conto che $\operatorname{sen} t = t + o(t^2)$, per $t \to 0$, si ha

$$\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2) + o([ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2)]^2) = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2).$$

Poiché

$$\cos ax = 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^3) = 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2)$$

e

$$e^{ax} = 1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = 1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2} + o(x^2),$$

otteniamo

$$\text{numeratore} = ax - \tfrac{(ax)^2}{2} + 1 - \tfrac{(ax)^2}{2} - (1 + ax + \tfrac{(ax)^2}{2}) + o(x^2) = -\tfrac{3}{2}\,(ax)^2 + o(x^2).$$

Denominatore: osserviamo che per la gerarchia degli infiniti/infinitesimi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2}{x^p} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^p}{e^y}\,\operatorname{sen}\left(-\tfrac{1}{y}\right)^2 = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

quindi in particolare $e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 = o(x^2)$.
Inoltre

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\tfrac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Riassumendo:

$$\text{denominatore} = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Rapporto: dalle stime precedenti abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+ax)\,) + \cos ax - e^{ax}}{e^{1/x}\operatorname{sen} x^2 + \log(\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{3}{2}\,(ax)^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{3}{2}\,(ax)^2}{\frac{x^2}{2}}\,\frac{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = 3a^2.$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/07/2023

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cosh x - \cos x} - \sin x - \log\left(\sqrt[6]{1+x^3}\right)}{(\operatorname{senh} x - \sin x)^a}$$

$[a = \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$.

<u>*Svolgimento:*</u>

Analizziamo gli addendi al numeratore:

- $\cosh x - \cos x = x^2 + \frac{x^6}{360} + o(x^6)$

  $\Longrightarrow \quad (\cosh x - \cos x)^{1/2} = x\left(1 + \frac{x^4}{360} + o(x^4)\right)^{1/2} = x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^4}{360} + o(x^4)\right)$,
- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$,
- $\log(\sqrt[6]{1+x^3}) = \frac{1}{6}\log(1+x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^5)$.

Quindi risulta

$$\text{Numeratore } = x + \frac{x^5}{720} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + o(x^5) = -\frac{1}{144}x^5 + o(x^5).$$

Per quanto riguarda il denominatore, poiché $\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, risulta

$$\text{Denominatore } = (\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x)^a = \frac{x^{3a}}{3^a} + o(x^{3a}).$$

Quindi il imite proposto risulta uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{144}x^5 + o(x^5)}{\frac{x^{3a}}{3^a} + o(x^{3a})} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a = \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \\ 0 & \text{se } a = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

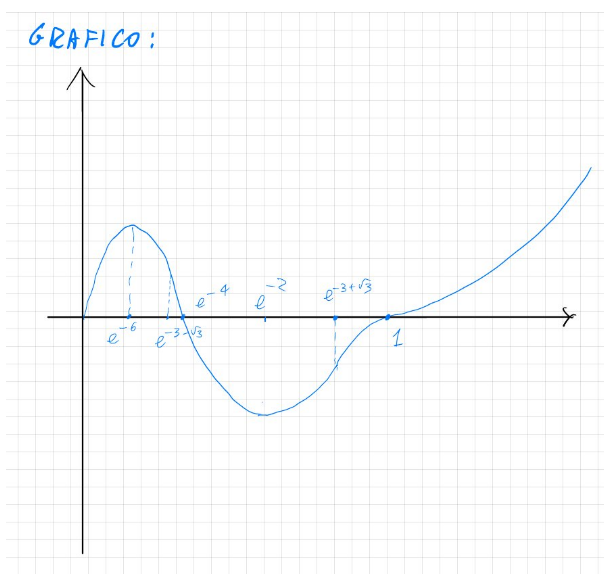
$$f(x) = \pm\big(\log x + a\big)x\log^3 x$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità.
Facoltativo: studiare la derivata seconda e determinare gli intervalli di concavità/convessità e eventuali punti di flesso.

$[a = 4, -4]$.

Svolgimento: La funzione sotto studiata è $f(x) = (\log x + 4)x\log^3 x$.

- Non vi sono simmetrie né periodicità.
- $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$.
- $f \in C^\infty(\mathcal{D})$.
- $f(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow x \in (0, e^{-4}] \cup [1, +\infty)$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = (\log^2 x)(\log^2 x + 8\log x + 12)$.
  Osserviamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, quindi non possono esserci asintoti obliqui.
- $f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow x \in (0, e^{-6}] \cup [e^{-2}, +\infty)$.
  e^{-6} risulta essere punto di massimo relativo, con $f(e^{-6}) = \frac{2\cdot 6^3}{e^6}$.
  e^{-2} risulta essere punto di minimo assoluto, con $f(e^{-2}) = -\frac{16}{e^2}$.
- Calcoliamo $f''(x) = \frac{4}{x}[(\log x)(\log^2 x + 6\log x + 6)]$.
  Risulta $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$,
- $f''(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow x \in [e^{-3-\sqrt{3}}, e^{-3+\sqrt{3}}] \cup [1, +\infty)$.
  Abbiamo quindi i seguenti tre punti di flesso: $e^{-3-\sqrt{3}}, e^{-3+\sqrt{3}}, 1$.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}) \sinh^\alpha x}{x^{2\alpha}(A + e^{-x})} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[A = 5, 4, 3, 2]$

<u>*Svolgimento:*</u> (i) Per $x \to 0$ la funzione integranda si comporta come $\frac{2}{A}x^{-\alpha}$, quindi l'integrale converge nell'intervallo $(0, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Per $x \to +\infty$ la funzione integranda si comporta come $\frac{e^{(\alpha-\frac{1}{2})x}}{Ax^{2\alpha}}$, quindi l'integrale converge nell'intervallo $(1, +\infty)$ se $\alpha < \frac{1}{2}$ e diverge se $\alpha > \frac{1}{2}$. Se $\alpha = \frac{1}{2}$, l'integranda si comporta al $+\infty$ come $\frac{1}{Ax}$ e l'integrale diverge in $(1, +\infty)$.
Perciò l'integrale converge in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.
(ii) $\alpha = 0$: ponendo $y = e^{-\frac{1}{2}x}$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}}{A + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{2 + 2y}{A + y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{A}} \arctan(1/\sqrt{A}) + \log\left(\frac{A+1}{A}\right).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^6 + (7-\mathrm{i})z^3 - 8 - 8\mathrm{i} = 0 \qquad \left[z^6 - (7-\mathrm{i})z^3 - 8 - 8\mathrm{i} = 0, \quad z^6 \pm (9+\mathrm{i})z^3 + 8 + 8\mathrm{i} = 0\right].$$

Svolgimento: Sostituiamo $\zeta = z^3$ e consideriamo l'equazione di secondo grado

$$\zeta^2 + (7-i)\zeta - 8 - 8i = 0. \tag{1}$$

Il discriminante di tale equazione è

$$(7-i)^2 + 4(8+8i) = 49 - 14i + i^2 + 32 + 32i = 81 + 18i + i^2 = (9+i)^2.$$

(Si noti che nei quattro compiti il discriminante è sempre un quadrato della forma $a^2-1+2ai = (a+i)^2$ con a intero.) Pertanto le radici di (1) sono $\zeta = -8 (= 8e^{\mathrm{i}\pi})$ e $\zeta = 1+i (= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4})$. Si conclude trovando le radici terze di questi due numeri complessi. Ovvero, le sei soluzioni sono:

$$-2, \quad 2e^{\mathrm{i}\pi/3}, \quad 2e^{\mathrm{i}5\pi/3}, \quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}\pi/12}, \quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}3\pi/4}, \quad 2^{1/6}e^{\mathrm{i}17\pi/12}.$$

Le varianti si risolvono in maniera analoga, basterà notare che (1) è sempre della forma $(\zeta \pm 8)(\zeta \pm (1+i))$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell' ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{a}{\cos(ax)} \qquad \left[f(x) = \frac{a^2}{\cos(ax)} \right].$$

$[a = (\sqrt{2}, \sqrt{3})]$

Svolgimento: Si ha:

$$\cos(ax) = 1 - \tfrac{a^2}{2}x^2 + \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0.$$

Ponendo $y = \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \to 0$ per $x \to 0$ si ha che, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(ax)} &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3) \\ &= 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) + (\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^2 + (\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^3 \\ &\quad + o((\tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + o(x^5))^3) \\ &= 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{24}x^4 + \tfrac{a^4}{4}x^4 + o(x^5) = 1 + \tfrac{a^2}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^4x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$

Infine, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{\cos(ax)} &= a + \tfrac{a^3}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^5x^4 + o(x^5), \\ \frac{a^2}{\cos(ax)} &= a^2 + \tfrac{a^4}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}a^6x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$