

Analisi Matematica I
Limiti di funzioni e continuità

DefLimFunz

Esercizio 1.1. Calcolare i seguenti limiti, verificandoli, poi, con la definizione.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{|x - 2|} + 3$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \log(1 + |x - 1|)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x^2 - 1}\right)$
- (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x^2 - 1}\right)$

ud:LimFunzA

Esercizio 1.2. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni sia per $x \rightarrow 0^+$ sia per $x \rightarrow +\infty$.

- (1) $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x(x^2 + 1)}$
- (2) $\frac{x(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2 + 1}$
- (3) $\frac{\sqrt{1+x} - e^x}{x^2(1 + 3^x)}$
- (4) $\frac{(\sqrt{1+x} - e^x)^2}{x(1 + 3^x)}$
- (5) $\frac{(\sqrt{1+x} - 1)(e^x - 1)}{x^2(1 + 2^x)}$
- (6) $\frac{\log(1 + x^2) + x}{x(1 + x^2)}$
- (7) $\frac{\log(1 + x^2) + x \log x}{x(1 + \log x)}$
- (8) $\frac{\log(1 + x^2) + x^2}{x \log x}$
- (9) $\frac{\log(1 + x^2) + x^2}{x^2 \log x}$
- (10) $\frac{\log(1 + x^2) + x^2}{x^3 \log x}$
- (11) $\frac{\log(1 + x)}{e^x - \sqrt{1+x}}$
- (12) $\frac{(\sqrt{1+x} - 1)^2}{\log(x^2 + 1)}$
- (13) $\frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2 - e^x}{x^2 + \log(1 + x)}$

- (14) $\log x \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- (15) $\frac{(\log x)^2}{\log(1+x)}$
- (16) $\frac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)}$
- (17) $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x$
- (18) $\sqrt{x} \left(\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$
- (19) $\frac{e^{-x} - 1 + \sin(x^2)}{|\log x| + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$
- (20) $\frac{\sin(x^2 + x\sqrt{x}) + x^3}{x^{3/2} + x^2}$
- (21) $\frac{(e^x - \sqrt{|\cos x|}) \cdot \operatorname{arctg} x}{(x^2 + |\sin x|)^2}$
- (22) $\frac{\sqrt[5]{1 - \cos x} \cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x - 1)}$

ud:LimFunzB

Esercizio 1.3. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni per $x \rightarrow x_0$. In caso di funzioni infinite/infinitesime, determinarne l'ordine, se esiste.

- (1) $f(x) = \frac{e^{x^2-1} - 1}{\sqrt{\log x}} \quad x \rightarrow 1^+$
- (2) $f(x) = \frac{(e^{x^2-1} - 1) \log(x-1)}{\sqrt{\log x}} \quad x \rightarrow 1^+$
- (3) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{\sin(x-1)} \quad x \rightarrow 1$
- (4) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^3 \log(x-1)}{\sin(x-1)} \quad x \rightarrow 1^+$
- (5) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)e^{\frac{1}{1-x}}}{\sin(x-1)} \quad x \rightarrow 1^+$
- (6) $f(x) = \log(1 + e^x - e^2) \quad x \rightarrow 2$
- (7) $f(x) = \frac{\log(1 + e^x - e^2)}{\sqrt{2x} - 2} \quad x \rightarrow 2$
- (8) $f(x) = \frac{\log(\cos x + x^3)}{x \sin x + x^5} \quad x \rightarrow 0$

AsintOrizz

Esercizio 1.4. Determinare gli eventuali asintoti orizzontali od obliqui delle funzioni che seguono.

- (1) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x^{3/2} + 3}{3(x+5)^2 + \sqrt{x}} \quad x \rightarrow +\infty$

- (2) $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^{3/2} + 3}{3(x+5)^2 + \sqrt{x}} \quad x \rightarrow +\infty$
- (3) $f(x) = \log\left(\frac{2x^3 + 3x^{3/2} + 3}{3(x+5)^2 + \sqrt{x}}\right) \quad x \rightarrow +\infty$
- (4) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x-4}-x} \quad x \rightarrow +\infty$
- (5) $f(x) = e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x \quad x \rightarrow +\infty$
- (6) $f(x) = \log(2e^{x+1} + 3x^{10}) \quad x \rightarrow +\infty$
- (7) $f(x) = \log(x^{12}e^x + |x|) \quad x \rightarrow -\infty$
- (8) $f(x) = \log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) \quad x \rightarrow -\infty$
- (9) $f(x) = \log(x^{12}e^{-x} + 1) \quad x \rightarrow -\infty$
- (10) $f(x) = e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x| \quad x \rightarrow -\infty$

ud:OrdInfTo

Esercizio 1.5. Determinare, se esiste, l'ordine di infinito delle seguenti funzioni.

- (1) $f(x) = \frac{\log x - \log(x^3 + 7)}{\log(5x)} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} \quad x \rightarrow +\infty$
- (2) $f(x) = \frac{3x^2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{(\operatorname{arctg} x)(\sqrt{x^4+3x-x^2})} \quad x \rightarrow +\infty$
- (3) $f(x) = x^4 + x \sin x - e^{1/x} \quad x \rightarrow +\infty$
- (4) $f(x) = \log\left(\frac{x^2+x^3}{1+x+x^2}\right) + 3x^6 \quad x \rightarrow +\infty$
- (5) $f(x) = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)(1+x^3) \quad x \rightarrow +\infty$
- (6) $f(x) = \log(1 + 2x^4 + e^{2x}) \quad x \rightarrow +\infty$
- (7) $f(x) = \frac{3^{1/x} - 1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^4}\right)} \quad x \rightarrow +\infty$
- (8) $f(x) = \frac{\log(x^4 + 4x^3)}{x^{1/x} - 1} \quad x \rightarrow +\infty$
- (9) $f(x) = \frac{x}{|x-1|} \quad x \rightarrow 1$
- (10) $f(x) = \frac{x}{|x^2-1|} \quad x \rightarrow 1$
- (11) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad x \rightarrow 1^+$
- (12) $f(x) = \frac{\sin x \log(9+x)}{e^{x^3} - \cos x} \quad x \rightarrow 0$
- (13) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\log x} \quad x \rightarrow 0^+$
- (14) $f(x) = \frac{\arcsin(x^2 + x \log x)}{(5x - \log x)(x^2 + e^{-1/x})} \quad x \rightarrow 0^+$

- (15) $f(x) = \frac{e^{x^2} - x^x}{1 - \cos x} \quad x \rightarrow 0^+$
- (16) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2} \quad x \rightarrow 0$
- (17) $f(x) = (1+x)^{1/x^2} \quad x \rightarrow 0^+$
- (18) $f(x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^{e^{2x}} \quad x \rightarrow 0^+$
- (19) $f(x) = \frac{\frac{1}{x^5} \log\left(1 + x^4 \sin \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^2} \log x}{\operatorname{tg} x + \arcsin x^2} \quad x \rightarrow 0$

Esercizio 1.6. Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni.

- (1) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x} \quad x \rightarrow 0$
- (2) $f(x) = \frac{x}{\cos x} \quad x \rightarrow 0$
- (3) $f(x) = \frac{x}{x+1} \sin x \quad x \rightarrow 0$
- (4) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \quad x \rightarrow 0$
- (5) $f(x) = \frac{\sin x}{3\sqrt{x}} \quad x \rightarrow 0^+$
- (6) $f(x) = \frac{x^2}{|x|} \quad x \rightarrow 0$
- (7) $f(x) = \frac{\log(1+x^3)}{x} \quad x \rightarrow 0$
- (8) $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{e^x - 1} \quad x \rightarrow 0$
- (9) $f(x) = \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{x \log x + e^{x^2} - 1} \quad x \rightarrow 0^+$
- (10) $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{\operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sin x} \quad x \rightarrow 0^+$
- (11) $f(x) = 1 - |\log x|^{\frac{1}{|\log x|}} \quad x \rightarrow 0^+$
- (12) $f(x) = (x-1) \log x \quad x \rightarrow 1$
- (13) $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x-2} + (x-2)^2}{\sqrt[4]{x-2} + 1 - \cos \pi x} \quad x \rightarrow 2^+$
- (14) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{2x - \pi} \quad x \rightarrow \pi/2$
- (15) $f(x) = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \rightarrow +\infty$
- (16) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4 + 3\sqrt{x}} \quad x \rightarrow +\infty$

$$(17) f(x) = \cos(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) - 1 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$(18) f(x) = \frac{5x^2 - 1}{x^3 + 1} \cdot \frac{1 - e^{\cos(1/x)}}{\operatorname{arctg}(x \log x)} \quad x \rightarrow +\infty$$

OrdinInfmo

Esercizio 1.7. Disporre in ordine crescente di infinito, per $x \rightarrow +\infty$, le seguenti funzioni

$$(1) f(x) = \frac{\log(1+x^4)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} + \frac{\log x}{x^2}\right)}, \quad g(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^8 + 2x} - x^4}, \quad h(x) = \frac{\log(x^2 + 3x + 1)}{e^{-x} + \log(1 + \frac{1}{x^2})}$$

$$(2) f(x) = \frac{(e^x - 1) \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x^3+1}\right)}{(e^x + 3x)[\log(1 + \frac{1}{x})]^4}, \quad g(x) = \frac{\log \log(1 + \frac{1}{x^2})}{\arcsin\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}, \quad h(x) = \frac{(x^2 + 3 \sin x + 1) \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{\log x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}$$

$$(3) f(x) = \frac{\log(1+x)}{(\cos \frac{1}{x} - 1) \operatorname{arctg} x}, \quad g(x) = \frac{\log(1 + \log x)}{(e^{1/x} - 1) \sin \frac{1}{x}}, \quad h(x) = \frac{(x + \log x)^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\arcsin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$(4) f(x) = \frac{\log \log(1+x^2)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3 \log x}\right)}, \quad g(x) = \frac{\log|4 + \log \frac{1}{x}|}{e^{-x} + \sin\left(\frac{x+1}{x^4 \log x + 1}\right)}, \quad h(x) = (x^4 + x^4 \log x + 4) \sin\left(\frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{x \log \log x}\right)$$

OrdinInfmo

Esercizio 1.8. Disporre in ordine crescente di infinitesimo, per $x \rightarrow 0^+$, le seguenti funzioni

$$(1) f(x) = (x^x - 1) \sin(x \log x), \quad g(x) = \log \cos(x^2) + e^{x^2} - e^{x^4}, \quad h(x) = \frac{1 - \cos(x \log x)}{\log x}$$

$$(2) f(x) = \frac{\cos x - e^x}{\log \sin x}, \quad g(x) = \frac{x \log(1 + \sin x)}{\sin x}, \quad h(x) = (e^x - 1 - \log(1 - x)) \log \operatorname{tg} x$$

$$(3) f(x) = \cos x - e^{-x^2}, \quad g(x) = \frac{\sin^4 x}{\sin(x^2)} \log \operatorname{tg} x, \quad h(x) = \frac{e^{x^2} - \log(1 + x^4) - 1}{\log \log(1 + x^2)}$$

$$(4) f(x) = [\log(1 + \operatorname{tg} x)]^3, \quad g(x) = \frac{1 - e^{-x^3}}{\log \operatorname{tg} x}, \quad h(x) = (e^{x^3} - \cos x^2) \log \sin x$$

$$(5) f(x) = (1 - e^{1-\cos x}) \log(1 + \sin(e^{-1/x})), \quad g(x) = e^{x^2} - e^{x^3}, \quad h(x) = \frac{e^{\sin^2 x} - \cos(x^2)}{\log \sin x}$$

LimSuccC

Esercizio 1.9. Calcolare il limite per $n \rightarrow +\infty$ delle seguenti successioni

$$(1) a_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + \sqrt{n}}\right)$$

$$(2) a_n = \cos n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$(3) a_n = \frac{\log(1 + e^n)}{n}$$

$$(4) a_n = \log\left(1 + \frac{\pi^n}{n!}\right)$$

$$(5) a_n = \frac{\log(3 + \pi^n)}{2n}$$

- (6) $a_n = \frac{\log(3^n + \pi^n)}{2n}$
- (7) $a_n = \frac{(3 + n! + \pi^{3n})(n + \sqrt{n})}{(2 \cdot n! + 3) \log(1 + n^n)}$
- (8) $a_n = \log(n + \sqrt{n^2 + 1}) - \log n$
- (9) $a_n = \log(n - \sqrt{n^2 - 1}) + \log n$
- (10) $a_n = \frac{\log(n^2 + 1) - \log n}{\log(2n)} (n^2 + n^{3/2} \log n - 2\sqrt{n})$
- (11) $a_n = 2^{n+1} - 2^{\sqrt{n^2-1}}$
- (12) $a_n = \sqrt[n]{n^3}$
- (13) $a_n = \sqrt[2n+1]{-n}$
- (14) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 3}$
- (15) $a_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}$
- (16) $a_n = (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}) \sqrt[n]{2^{n+1} + n^2}$
- (17) $a_n = \frac{(n^2 + 5n + 7)e^{1/n}}{(n + 1)(\sqrt{n + 3} - \sqrt{n})}$
- (18) $a_n = \left(\frac{2n + 1}{3n + 4}\right)^{n/3}$
- (19) $a_n = \left(\frac{2n + 1}{3n + 4}\right)^{3/n}$
- (20) $a_n = \left(\frac{3n + 4}{2n + 1}\right)^n$
- (21) $a_n = (\sqrt[n]{2} - 1)^n$
- (22) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$
- (23) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}$
- (24) $a_n = \frac{(2n + 1)^n + n^n}{(2n + 2)^n - n^n}$
- (25) $a_n = \frac{\log(n!)}{n \log n}$
- (26) $a_n = n^2(2n + \sqrt{n})^{1/n} - \cos(n^3)$
- (27) $a_n = (4n^n - (n + 1)^n)^{1/n}$
- (28) $a_n = ((n + 1)^{n+1} - n^{n+1})^{1/n}$
- (29) $a_n = \frac{(n^2 - 1)^n \sin(\frac{\pi n + 1}{4n - 1})}{(n - 2)^{2n} + \arctg(n! - 2^n)}$
- (30) $a_n = \frac{(3n^{2n^2} - (n^2 + 1)^{n^2})^2 + 4n^{n^2}}{(n^2 + 5)^{2n^2} + 6(n^2)^{n^2 + n}}$

Analisi Matematica I
Limiti di funzioni e continuità (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1.1

- (1) Verifichiamo che $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{|x-2|} + 3 = 3$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $|\sqrt{|x-2|} + 3 - 3| < \varepsilon \iff \sqrt{|x-2|} < \varepsilon \iff |x-2| < \varepsilon^2$, e quindi possiamo prendere $\delta_\varepsilon := \varepsilon^2$.
- (2) Verifichiamo che $\lim_{x \rightarrow 3} \log(1 + |x-1|) = \log 3$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $|\log(1 + |x-1|) - \log 3| < \varepsilon \iff |\log x - \log 3| < \varepsilon \iff \log 3 - \varepsilon < x < \log 3 + \varepsilon \iff 3e^{-\varepsilon} < x < 3e^\varepsilon \iff 3(e^{-\varepsilon} - 1) < x - 3 < 3(e^\varepsilon - 1)$, e quindi possiamo prendere $\delta_\varepsilon := \min\{3(1 - e^{-\varepsilon}), 3(e^\varepsilon - 1)\}$.
- (3) Verifichiamo che $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$. Infatti, per ogni $M > 0$, si ha $\frac{1}{|x-1|} > M \iff |x-1| < \frac{1}{M}$, e quindi possiamo prendere $\delta_M := \frac{1}{M}$.
- (4) Verifichiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{3}{x^2-1}) = 2$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha, se $x > 1$, che $|2 + \frac{3}{x^2-1} - 2| < \varepsilon \iff \frac{3}{x^2-1} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{3}{\varepsilon} + 1 \iff x > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} + 1}$, e quindi possiamo prendere $x_\varepsilon := \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} + 1}$.
- (5) Verifichiamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{3}{x^2-1}) = 2$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha, se $x < -1$, che $|2 + \frac{3}{x^2-1} - 2| < \varepsilon \iff \frac{3}{x^2-1} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{3}{\varepsilon} + 1 \iff x < -\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} + 1}$, e quindi possiamo prendere $x_\varepsilon := -\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} + 1}$.

□

Svolgimento esercizio 1.2

- (1) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \frac{1}{2}(1+o(1)) \rightarrow \frac{1}{2}$, mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x^2+1)} = \frac{\sqrt{x}(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} = \frac{1}{x^{5/2}}(1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (2) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2+1} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}x(1+o(1))}{1+o(1)} = \frac{1}{2}x^2(1+o(1)) \rightarrow 0$, mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2+1} = \frac{x\sqrt{x}(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \frac{1}{\sqrt{x}}(1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (3) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x^2(1+3^x)} = \frac{1 + \frac{1}{2}x + o(x) - (1+x+o(x))}{x^2(2+o(1))} = -\frac{1}{4x}(1+o(1)) \rightarrow -\infty$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x^2(1+3^x)} = \frac{-e^x(1+o(1))}{x^2 3^x(1+o(1))} = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{e}{3}\right)^x (1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (4) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{(\sqrt{1+x}-e^x)^2}{x(1+3^x)} = \frac{(1 + \frac{1}{2}x + o(x) - (1+x+o(x)))^2}{x(2+o(1))} = \frac{(-\frac{1}{2}x(1+o(1)))^2}{x(2+o(1))} = \frac{1}{8}x(1+o(1)) \rightarrow 0$, mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(\sqrt{1+x}-e^x)^2}{x(1+3^x)} = \frac{(-e^x)^2(1+o(1))}{x 3^x(1+o(1))} = \frac{1}{x} \left(\frac{e^2}{3}\right)^x (1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

- (5) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{(\sqrt{1+x}-1)(e^x-1)}{x^2(1+2^x)} = \frac{\frac{1}{2}x(1+o(1)) \cdot x(1+o(1))}{x^2(2+o(1))} = \frac{1}{4}(1+o(1)) \rightarrow \frac{1}{4}$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(\sqrt{1+x}-1)(e^x-1)}{x^2(1+2^x)} = \frac{\sqrt{x} \cdot e^x(1+o(1))}{x^2 2^x(1+o(1))} = \frac{1}{x^{3/2}} \left(\frac{e}{2}\right)^x (1+o(1)) \rightarrow +\infty$.
- (6) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\log(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} = \frac{x^2(1+o(1))+x}{x(1+o(1))} = \frac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))} \rightarrow 1$, mentre, per $x \rightarrow +\infty$,
 $\frac{\log(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} = \frac{2\log x(1+o(1))+x}{x^3(1+o(1))} = \frac{x(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} = \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$.
- (7) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\log(1+x^2)+x\log x}{x(1+\log x)} = \frac{x^2(1+o(1))+x\log x}{x\log x(1+o(1))} = \frac{x\log x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} \rightarrow 1$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\log(1+x^2)+x\log x}{x(1+\log x)} = \frac{2\log x(1+o(1))+x\log x}{x\log x(1+o(1))} = \frac{x\log x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} \rightarrow 1$.
- (8) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x\log x} = \frac{x^2(1+o(1))+x^2}{x\log x} = \frac{2x^2(1+o(1))}{x\log x} = \frac{2x}{\log x}(1+o(1)) \rightarrow 0$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x\log x} = \frac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x\log x} = \frac{x^2(1+o(1))}{x\log x} = \frac{x}{\log x}(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.
- (9) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x^2\log x} = \frac{x^2(1+o(1))+x^2}{x^2\log x} = \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2\log x} = \frac{2}{\log x}(1+o(1)) \rightarrow 0$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x^2\log x} = \frac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x^2\log x} = \frac{x^2(1+o(1))}{x^2\log x} = \frac{1}{\log x}(1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (10) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x^3\log x} = \frac{x^2(1+o(1))+x^2}{x^3\log x} = \frac{2x^2(1+o(1))}{x^3\log x} = \frac{2}{x\log x}(1+o(1)) \rightarrow -\infty$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x^3\log x} = \frac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x^3\log x} = \frac{x^2(1+o(1))}{x^3\log x} = \frac{1}{x\log x}(1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (11) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\log(1+x)}{e^x - \sqrt{1+x}} = \frac{x(1+o(1))}{1+x+o(x) - (1+\frac{1}{2}x+o(x))} = \frac{x(1+o(1))}{\frac{1}{2}x(1+o(1))} \rightarrow 2$, mentre,
per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\log(1+x)}{e^x - \sqrt{1+x}} = \frac{\log x(1+o(1))}{e^x - \sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{\log x(1+o(1))}{e^x(1+o(1))} \rightarrow 0$.
- (12) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\log(x^2+1)} = \frac{x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \rightarrow 1$, mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\log(x^2+1)} = \frac{\sqrt{x}(1+o(1))}{2\log x(1+o(1))} \rightarrow +\infty$.
- (13) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2 - e^x}{x^2 + \log(1+x)} = \frac{(1+\frac{1}{3}x+o(x))^2 - (1+x+o(x))}{x^2 + x(1+o(1))} = \frac{1+\frac{2}{3}x+o(x) - 1 - x + o(x)}{x(1+o(1))} = \frac{-\frac{1}{3}x(1+o(1))}{x(1+o(1))} \rightarrow -\frac{1}{3}$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2 - e^x}{x^2 + \log(1+x)} = \frac{x^{2/3}(1+o(1)) - e^x}{x^2 + \log x(1+o(1))} = \frac{-e^x(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \rightarrow -\infty$.
- (14) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\log x \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log x \cdot \log\left(\frac{1}{x}(1+o(1))\right) = -(\log x)^2(1+o(1)) \rightarrow -\infty$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\log x \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log x \cdot \frac{1}{x}(1+o(1)) \rightarrow 0$.

(15) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{(\log x)^2}{\log(1+x)} = \frac{(\log x)^2}{x(1+o(1))} \rightarrow +\infty$, mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(\log x)^2}{\log(1+x)} = \frac{(\log x)^2}{\log x(1+o(1))} = \log x(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

(16) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \frac{(\log x)^2 \cdot x^2(1+o(1))}{x(1+o(1))} = x(\log x)^2(1+o(1)) \rightarrow 0$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \frac{(\log x)^2 \cdot 2 \log x(1+o(1))}{\log x(1+o(1))} = 2(\log x)^2(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

(17) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x(1+o(1))} \cdot \log x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}x^{1/3} \log x(1+o(1)) \rightarrow 0$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x = \sqrt[3]{\sqrt{x}(1+o(1))} \cdot \log x = x^{1/6} \log x(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

(18) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\sqrt{x} \left(\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \sqrt{x} \log(x+1) = \sqrt{x} \cdot x(1+o(1)) = x^{3/2}(1+o(1)) \rightarrow 0$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x} \left(\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \sqrt{x} \log(x+1) = x^{1/2} \log x(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

(19) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{e^{-x} - 1 + \sin(x^2)}{|\log x| + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{1 - x + o(x) - 1 + x^2 + o(x^2)}{-\log x + \log \left(\frac{1}{x}(1+o(1)) \right)} = \frac{-x + o(x)}{-2 \log x(1+o(1))} \rightarrow 0$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{e^{-x} - 1 + \sin(x^2)}{|\log x| + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{e^{-x} - 1 + \sin(x^2)}{\log x(1+o(1))} \rightarrow 0$, perché il numeratore è limitato.

(20) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\sin(x^2 + x\sqrt{x}) + x^3}{x^{3/2} + x^2} = \frac{\sin(x\sqrt{x}(1+o(1))) + x^3}{x^{3/2}(1+o(1))} = \frac{x\sqrt{x}(1+o(1)) + x^3}{x^{3/2}(1+o(1))} = \frac{x\sqrt{x}(1+o(1))}{x^{3/2}(1+o(1))} \rightarrow 1$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\sin(x^2 + x\sqrt{x}) + x^3}{x^{3/2} + x^2} = \frac{x^3(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = x(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

(21) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{(e^x - \sqrt{|\cos x|}) \cdot \arctg x}{(x^2 + |\sin x|)^2} = \frac{(1 + x + o(x) - \sqrt{|1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)|}) \cdot x(1+o(1))}{(x^2 + |x|(1+o(1)))^2} = \frac{(1 + x + o(x) - (1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2))) \cdot x(1+o(1))}{|x|^2(1+o(1))} = \frac{x(1+o(1)) \cdot x(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \rightarrow 1$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(e^x - \sqrt{|\cos x|}) \cdot \arctg x}{(x^2 + |\sin x|)^2} = \frac{e^x(1+o(1)) \cdot \frac{\pi}{2}(1+o(1))}{(x^2(1+o(1)))^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^x}{x^4}(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

(22) Si ha, per $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x - 1)} = \frac{\sqrt[5]{\frac{x^2}{2}(1+o(1))} \cdot x(1+o(1)) \cdot \log x}{\sqrt[6]{x} \cdot x(1+o(1))} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}x^{7/30} \log x(1+o(1)) \rightarrow 0$,
mentre, per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x - 1)} = \frac{\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x}{\sqrt[6]{x}} \frac{\log x}{e^x} \rightarrow 0$, perché il fattore $\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x$ è limitato, mentre $\frac{\log x}{\sqrt[6]{x} \cdot e^x} \rightarrow 0$.

□

Svolgimento esercizio 1.3

(1) Introdotta la variabile $z = x - 1 \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{e^{z^2+2z-1}}{\sqrt{\log(1+z)}} = \frac{(z^2+2z)(1+o(1))}{\sqrt{z(1+o(1))}} = \frac{2z(1+o(1))}{z^{1/2}(1+o(1))} = 2z^{1/2}(1+o(1)) \rightarrow 0$, e l'ordine di infinitesimo è $\frac{1}{2}$.

- (2) Introdotta la variabile $z = x-1 \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(e^{z^2+2z}-1)\log z}{\sqrt{\log(1+z)}} = \frac{(z^2+2z)(1+o(1))\log z}{\sqrt{z(1+o(1))}} = \frac{2z(1+o(1))\log z}{z^{1/2}(1+o(1))} = 2z^{1/2}\log z(1+o(1)) \rightarrow 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.
- (3) Introdotta la variabile $z = x-1 \rightarrow 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)^3}{\sin z} = \frac{(\frac{1}{2}z)^3(1+o(1))}{z(1+o(1))} = \frac{1}{8}z^2(1+o(1)) \rightarrow 0$, e l'ordine di infinitesimo è 2.
- (4) Introdotta la variabile $z = x-1 \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)^3\log z}{\sin z} = \frac{(\frac{1}{2}z)^3(1+o(1))\log z}{z(1+o(1))} = \frac{1}{8}z^2\log z(1+o(1)) \rightarrow 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.
- (5) Introdotta la variabile $z = x-1 \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)e^{-\frac{1}{z}}}{\sin z} = \frac{\frac{1}{2}z(1+o(1))e^{-\frac{1}{z}}}{z(1+o(1))} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{z}}(1+o(1)) \rightarrow 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.
- (6) Introdotta la variabile $z = x-2 \rightarrow 0$, si ha $f(x) = f(2+z) = \log(1+e^{2+z}-e^2) = \log(1+e^2(e^z-1)) = \log(1+e^2z(1+o(1))) = e^2z(1+o(1)) \rightarrow 0$, e l'ordine di infinitesimo è 1.
- (7) Introdotta la variabile $z = x-2 \rightarrow 0$, si ha $f(x) = f(2+z) = \frac{\log(1+e^{2+z}-e^2)}{\sqrt{2(2+z)-2}} = \frac{1}{2} \frac{\log(1+e^2(e^z-1))}{\sqrt{1+\frac{z}{2}-1}} = \frac{1}{2} \frac{\log(1+e^2z(1+o(1)))}{\frac{z}{4}(1+o(1))} = 2e^2(1+o(1)) \rightarrow 2e^2$, e l'ordine di infinito/infinitesimo non esiste.
- (8) Si ha $f(x) = \frac{\log(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+x^3)}{x(x+o(x))+x^5} = \frac{-\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = -\frac{1}{2}(1+o(1)) \rightarrow -\frac{1}{2}$, e l'ordine di infinito/infinitesimo non esiste.

□

Svolgimento esercizio 1.4

- (1) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = \frac{2}{3}$, per cui $y = \frac{2}{3}$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow +\infty$.
- (2) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3}(1+o(1)) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{2x}{3}(1+o(1)) = \frac{2}{3}$, e $q := \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} - \frac{2}{3}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-20x^2+3x^{3/2}-50x-\frac{2}{3}\sqrt{x}+3}{3x^2+30x+75+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-20x^2(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = -\frac{20}{3}$, per cui $y = \frac{2}{3}x - \frac{20}{3}$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow +\infty$.
- (3) Usando i risultati dell'esercizio (2), si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{2x}{3}(1+o(1)) \right) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{1}{x} \frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log \left(\frac{2x}{3}(1+o(1)) \right) = 0$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$.
- (4) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x^2+5x-4}-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{5x-4}{\sqrt{x^2+5x-4}+x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{5x(1+o(1))}{2x(1+o(1))} \right) = e^{5/2}$, per cui $y = e^{5/2}$ è asintoto orizzontale di f , per $x \rightarrow +\infty$.

- (5) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 + o(1)}{x} = 2$, e $q := \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + o(1) = 1$, per cui $y = 2x + 1$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow +\infty$.
- (6) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(2e^{x+1} + 3x^{10}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(2e^{x+1}(1 + o(1))) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \log 2 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log(2e^{x+1} + 3x^{10}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 + \log 2 + o(1)}{x} = 1$, e $q := \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(2e^{x+1} + 3x^{10}) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \log 2 + o(1) = 1 + \log 2$, per cui $y = x + 1 + \log 2$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow +\infty$.
- (7) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x^{12}e^x + |x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(|x|(1 + o(1))) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \log(x^{12}e^x + |x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log|x| + o(1)}{x} = 0$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \rightarrow -\infty$.
- (8) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(3e^{-x}(1 + o(1))) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \log 3 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \log 3 + o(1)}{x} = -1$, e $q := \lim_{x \rightarrow -\infty} (\log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log 3 + o(1) = \log 3$, per cui $y = x + \log 3$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow -\infty$.
- (9) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x^{12}e^{-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x^{12}e^{-x}(1 + o(1))) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 12 \log|x| + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \log(x^{12}e^{-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 12 \log|x| + o(1)}{x} = -1$, e $q := \lim_{x \rightarrow -\infty} (\log(x^{12}e^{-x} + 1) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 12 \log|x| + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \rightarrow -\infty$.
- (10) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + o(1) - 2x) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1 + o(1)}{x} = -2$, e $q := \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x| + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{3x^2+7}} = 1$, per cui $y = -2x + 1$ è asintoto obliquo di f , per $x \rightarrow -\infty$.

□

Svolgimento esercizio 1.5

- (1) Si ha $f(x) = \frac{\log x - 3 \log x(1 + o(1))}{\log x(1 + o(1))} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1+x}}} = -2(1 + o(1)) \cdot 2x\sqrt{x}(1 + o(1)) = -4x^{3/2}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito $\frac{3}{2}$.
- (2) Si ha $f(x) = \frac{3x^2 \cdot \frac{1}{x}(1 + o(1)) + x^3 \cdot \frac{1}{x}(1 + o(1))}{\frac{\pi}{2}(1 + o(1)) \frac{3x}{\sqrt{x^4+3x+x^2}}} = \frac{x^2(1 + o(1))}{\frac{\pi}{2}(1 + o(1)) \frac{3x}{2x^2(1 + o(1))}} = \frac{4}{3\pi}x^3(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 3.

- (3) Si ha $f(x) = x^4(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 4.
- (4) Si ha $f(x) = \log \left(\frac{x^3(1 + o(1))}{x^2(1 + o(1))} \right) + 3x^6 = \log(x(1 + o(1))) + 3x^6 = 3x^6(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 6.
- (5) Si ha $f(x) = \frac{1}{2x^2}(1 + o(1)) \cdot x^3(1 + o(1)) = \frac{1}{2}x(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (6) Si ha $f(x) = \log(e^{2x}(1 + o(1))) = 2x(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (7) Si ha $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x} \log 3} - 1}{\frac{1}{x^4}(1 + o(1))} = x^4 \cdot \frac{1}{x} \log 3(1 + o(1)) = \log 3 \cdot x^3(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 3.
- (8) Si ha $f(x) = \frac{\log(x^4(1 + o(1)))}{e^{\frac{1}{x} \log x} - 1} = \frac{4 \log x(1 + o(1))}{\frac{1}{x} \log x(1 + o(1))} = 4x(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (9) Introdotta la variabile $z = x - 1 \rightarrow 0$, si ha $f(x) = f(1 + z) = \frac{1 + z}{|z|} = \frac{1 + o(1)}{|z|(1 + o(1))} = \frac{1}{|z|}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (10) Introdotta la variabile $z = x - 1 \rightarrow 0$, si ha $f(x) = f(1 + z) = \frac{1 + z}{|z^2 + 2z|} = \frac{1 + o(1)}{2|z|(1 + o(1))} = \frac{1}{2} \frac{1}{|z|}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (11) Introdotta la variabile $z = x - 1 \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = f(1 + z) = \frac{1 + z}{\sqrt{z^2 + 2z}} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2z}(1 + o(1))} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{z}}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito $\frac{1}{2}$.
- (12) Si ha $f(x) = \frac{x(1 + o(1)) \cdot \log 9(1 + o(1))}{1 + x^3 + o(x^3) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{\log 9 \cdot x(1 + o(1))}{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))} = 2 \log 9 \frac{1}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (13) Si ha $f(x) = \exp(\log x \cdot \log \operatorname{tg} x) = \exp((\log x)^2(1 + o(1)))$, per cui f non ha ordine di infinito.
- (14) Si ha $f(x) = \frac{\arcsin(x \log x(1 + o(1)))}{-\log x(1 + o(1)) \cdot x^2(1 + o(1))} = \frac{x \log x(1 + o(1))}{-x^2 \log x(1 + o(1))} = -\frac{1}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (15) Si ha $f(x) = \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 - x + o(x)}{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))} = \frac{-x(1 + o(1))}{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))} = -\frac{2}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (16) Si ha $f(x) = \frac{1 + x + o(x) - 1 + x + o(x)}{x^2} = \frac{2x(1 + o(1))}{x^2} = \frac{2}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.
- (17) Si ha $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2} \log(1 + x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2} x(1 + o(1))\right) = e^{1/x(1 + o(1))}$, per cui f non ha ordine di infinito.
- (18) Si ha $f(x) = \exp\left(e^{2x} \log \frac{2(1 + o(1))}{x(1 + o(1))}\right) = \exp\left(e^{2x} \log \frac{2}{x}(1 + o(1))\right) = e^{-e^{2x} \log x(1 + o(1))} \rightarrow +\infty$, ma f non ha ordine di infinito.

(19) Si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{x^5}x^4 \sin \frac{1}{x}(1+o(1)) + \frac{2}{x^2} \log x}{x(1+o(1)) + x^2(1+o(1))} = \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}(1+o(1)) + \frac{2}{x^2} \log x}{x(1+o(1))} = \frac{\frac{2}{x^2} \log x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \frac{2}{x^3} \log x(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinito.

□

Svolgimento esercizio 1.6

- (1) Si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{x} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.
- (2) Si ha $f(x) = \frac{x}{1+o(1)} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.
- (3) Si ha $f(x) = \frac{x}{1+o(1)} x(1+o(1)) = x^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.
- (4) Si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x} = \frac{1}{2}x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.
- (5) Si ha $f(x) = \frac{x(1+o(1))}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\sqrt{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$.
- (6) Si ha $f(x) = |x|$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.
- (7) Si ha $f(x) = \frac{x^3(1+o(1))}{x} = x^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.
- (8) Si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{x(1+o(1))} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.
- (9) Si ha $f(x) = \frac{x^2 + x(1+o(1))}{x \log x + x^2(1+o(1))} = \frac{x(1+o(1))}{x \log x(1+o(1))} = \frac{1}{\log x}(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinitesimo.
- (10) Si ha $f(x) = \frac{1+x+o(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x}(1+o(1)) + x(1+o(1))} = \frac{x(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \sqrt{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$.
- (11) Si ha $f(x) = 1 - \exp\left(\frac{1}{|\log x|} \log |\log x|\right) = \frac{\log |\log x|}{|\log x|}(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinitesimo.
- (12) Introdotta la variabile $z = x - 1 \rightarrow 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = z \log(1+z) = z^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.
- (13) Introdotta la variabile $z = x - 2 \rightarrow 0^+$, si ha $f(x) = f(2+z) = \frac{\sin \sqrt{z} + z^2}{\sqrt[4]{z} + 1 - \cos(2\pi + \pi z)} = \frac{\sqrt{z}(1+o(1)) + z^2}{\sqrt[4]{z} + \frac{1}{2}\pi^2 z^2 + o(z^2)} = \frac{\sqrt{z}(1+o(1))}{\sqrt[4]{z}(1+o(1))} = \sqrt[4]{z}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{4}$.
- (14) Introdotta la variabile $z = x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$, si ha $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) - 1}{2z} = \frac{\cos z - 1}{2z} = \frac{-\frac{1}{2}z^2(1+o(1))}{2z} = -\frac{1}{4}z(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(15) Si ha $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x}(1+o(1)) = \frac{2}{2\sqrt{x}(1+o(1))} \cdot \frac{1}{x}(1+o(1)) = \frac{1}{x^{3/2}}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{3}{2}$.

(16) Si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} = \frac{1}{x^5}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 5.

(17) Si ha $f(x) = \cos\left(\frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}\right) - 1 = \cos\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}(1+o(1))\right) - 1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{4x}(1+o(1)) = -\frac{1}{8x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(18) Si ha $f(x) = \frac{5x^2(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} \cdot \frac{1 - e^{\cos 1 + o(1)}}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = \frac{10(1 - e^{\cos 1})}{\pi x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

□

Svolgimento esercizio 1.7

(1) Si ha $f(x) = \frac{\log(x^4(1+o(1)))}{\text{tg}\left(\frac{1}{x}(1+o(1))\right)} = \frac{4\log x(1+o(1))}{\frac{1}{x}(1+o(1))} = 4x \log x(1+o(1))$, $g(x) = \frac{1}{x}(1+o(1)) \frac{\sqrt{x^8+2x+x^4}}{2x} = \frac{2x^4(1+o(1))}{2x^2(1+o(1))} = x^2(1+o(1))$, e $h(x) = \frac{\log(x^2(1+o(1)))}{e^{-x} + \frac{1}{x^2}(1+o(1))} = \frac{2\log x(1+o(1))}{\frac{1}{x^2}(1+o(1))} = 2x^2 \log x(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infiniti è f, g, h .

(2) Si ha $f(x) = \frac{e^x(1+o(1)) \arctg\left(\frac{1}{x^2}(1+o(1))\right)}{e^x(1+o(1)) \frac{1}{x^4}(1+o(1))} = x^4(1+o(1)) \frac{1}{x^2}(1+o(1)) = x^2(1+o(1))$, $g(x) = \frac{\log\left(\frac{1}{x^2}(1+o(1))\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{x^2}(1+o(1))\right)} = \frac{-2\log x(1+o(1))}{\frac{1}{x^2}(1+o(1))} = -2x^2 \log x(1+o(1))$, e $h(x) = \frac{x^2(1+o(1)) \frac{1}{(\log x)^2(1+o(1))}}{\frac{1}{\log x}(1+o(1))} = \frac{x^2}{\log x}(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infiniti è h, f, g .

(3) Si ha $f(x) = \frac{\log x(1+o(1))}{-\frac{1}{2x^2}(1+o(1)) \frac{\pi}{2}(1+o(1))} = -\frac{4}{\pi} x^2 \log x(1+o(1))$, $g(x) = \frac{\log(\log x(1+o(1)))}{\frac{1}{x}(1+o(1)) \frac{1}{x}(1+o(1))} = x^2 \log \log x(1+o(1))$, e $h(x) = \frac{x^2(1+o(1)) \frac{1}{x}(1+o(1))}{\arcsin\left(\frac{1}{x}(1+o(1))\right)} = \frac{x(1+o(1))}{\frac{1}{x}(1+o(1))} = x^2(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infiniti è h, g, f .

(4) Si ha $f(x) = \frac{\log \log(x^2(1+o(1)))}{\text{tg}\left(\frac{1}{x^3}(1+o(1))\right)} = \frac{\log(2\log x(1+o(1)))}{\frac{1}{x^3}(1+o(1))} = x^3(\log 2 + \log \log x + o(1)) = x^3 \log \log x(1+o(1))$, $g(x) = \frac{\log\left|-\log x(1+o(1))\right|}{e^{-x} + \sin\left(\frac{1}{x^3 \log x}(1+o(1))\right)} = \frac{\log \log x(1+o(1))}{e^{-x} + \frac{1}{x^3 \log x}(1+o(1))} = x^3 \log x \cdot \log \log x(1+o(1))$, e $h(x) = \frac{x^4 \log x(1+o(1)) \sin\left(\frac{1}{x \log \log x}(1+o(1))\right)}{x \log \log x(1+o(1))} = \frac{x^4 \log x(1+o(1))}{x \log \log x(1+o(1))} = \frac{x^3 \log x}{\log \log x}(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infiniti è f, h, g .

□

Svolgimento esercizio 1.8

(1) Si ha $f(x) = (e^{x \log x} - 1)x \log x(1+o(1)) = x^2(\log x)^2(1+o(1))$, $g(x) = \log(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)) + 1 + x^2 + o(x^2) - 1 - x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4) + x^2 + o(x^2) = x^2(1+o(1))$, e $h(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2(\log x)^2(1+o(1))}{\log x} = \frac{1}{2}x^2 \log x(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infinitesimi è f, h, g .

- (2) Si ha $f(x) = \frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x+o(x)}{\log x(1+o(1))} = \frac{-x}{\log x}(1+o(1))$, $g(x) = \frac{x \sin x(1+o(1))}{\sin x} = x(1+o(1))$, e $h(x) = (1+x+o(x) - 1+x+o(x)) \log x = 2x \log x(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infinitesimi è h, g, f .
- (3) Si ha $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 + x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2(1+o(1))$, $g(x) = \frac{x^4(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \log x(1+o(1)) = x^2 \log x(1+o(1))$, e $h(x) = \frac{1+x^2+o(x^2)+x^4+o(x^4)-1}{\log(x^2(1+o(1)))} = \frac{x^2(1+o(1))}{2 \log x(1+o(1))} = \frac{x^2}{2 \log x}(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infinitesimi è g, f, h .
- (4) Si ha $f(x) = (\operatorname{tg} x)^3(1+o(1)) = x^3(1+o(1))$, $g(x) = \frac{1-1+x^3+o(x^3)}{\log x(1+o(1))} = \frac{x^3}{\log x}(1+o(1))$, e $h(x) = (1+x^3+o(x^3) - 1 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)) \log x(1+o(1)) = x^3 \log x(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infinitesimi è h, f, g .
- (5) Si ha $f(x) = (1 - e^{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}) \log(1 + e^{-1/x}(1+o(1))) = -\frac{1}{2}x^2(1+o(1))e^{-1/x}(1+o(1)) = -\frac{1}{2}x^2e^{-1/x}(1+o(1))$, $g(x) = 1+x^2+o(x^2)-1-x^3+o(x^3) = x^2(1+o(1))$, e $h(x) = \frac{e^{x^2(1+o(1))}-1+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{\log x(1+o(1))} = \frac{x^2(1+o(1))}{\log x(1+o(1))} = \frac{x^2}{\log x}(1+o(1))$, per cui l'ordinamento degli infinitesimi è f, h, g .

□

Svolgimento esercizio 1.9

- (1) Si ha $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+n^{-3/2}}\right) = \sin\left(2\pi n\left(1+\frac{1}{2n^{3/2}}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}(1+o(1))\right) \rightarrow 0$.
- (2) Si ha $\cos n \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos n}{n}(1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (3) Si ha $\frac{\log(1+e^n)}{n} = \frac{\log(e^n)(1+o(1))}{n} = \frac{n(1+o(1))}{n} \rightarrow 1$.
- (4) Si ha $\log\left(1+\frac{\pi^n}{n!}\right) = \frac{\pi^n}{n!}(1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (5) Si ha $\frac{\log(3+\pi^n)}{2n} = \frac{\log(\pi^n(1+o(1)))}{2n} = \frac{n \log \pi(1+o(1))}{2n} \rightarrow \frac{\log \pi}{2}$.
- (6) Si ha $\frac{\log(3^n+\pi^n)}{2n} = \frac{\log(\pi^n(1+o(1)))}{2n} = \frac{n \log \pi(1+o(1))}{2n} \rightarrow \frac{\log \pi}{2}$.
- (7) Si ha $\frac{(3+n!+\pi^{3n})(n+\sqrt{n})}{(2 \cdot n!+3) \log(1+n^n)} = \frac{n!(1+o(1)) \cdot n(1+o(1))}{2 \cdot n!(1+o(1)) \cdot n \log n(1+o(1))} = \frac{1}{2 \log n}(1+o(1)) \rightarrow 0$.
- (8) Si ha $\log(n+\sqrt{n^2+1}) - \log n = \log \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n} = \log \frac{2n(1+o(1))}{n} \rightarrow \log 2$.
- (9) Si ha $\log(n-\sqrt{n^2-1}) + \log n = \log \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} + \log n = \log \frac{n}{n+\sqrt{n^2-1}} = \log \frac{n}{2n(1+o(1))} \rightarrow -\log 2$.
- (10) Si ha $\frac{\log(n^2+1) - \log n}{\log(2n)} (n^2+n^{3/2} \log n - 2\sqrt{n}) = \frac{\log \frac{n^2+1}{n}}{\log n + \log 2} n^2(1+o(1)) = \frac{\log n(1+o(1))}{\log n(1+o(1))} n^2(1+o(1)) = n^2(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.

- (11) Si ha $2^{n+1} - 2^{\sqrt{n^2-1}} = 2^{\sqrt{n^2-1}}(2^{n+1-\sqrt{n^2-1}} - 1)$. Poiché $n+1-\sqrt{n^2-1} = \frac{(n+1)^2-n^2+1}{n+1+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2n+2}{n+1+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2n(1+o(1))}{2n(1+o(1))} = 1+o(1)$, si ha $2^{n+1}-2^{\sqrt{n^2-1}} = 2^{\sqrt{n^2-1}}(2^{1+o(1)}-1) = 2^{n(1+o(1))}(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.
- (12) Si ha $\sqrt[n]{n^3} = e^{\frac{1}{n} \log n^3} \rightarrow 1$.
- (13) Si ha $2^{n+1}\sqrt{-n} = -2^{n+1}\sqrt{n} = -e^{\frac{1}{2n+1} \log n} \rightarrow -1$.
- (14) Si ha $\sqrt[n]{n^2+3} = e^{\frac{1}{n} \log(n^2+3)} \rightarrow 1$.
- (15) Si ha $\sqrt[n]{2^n+n^2} = e^{\frac{1}{n} \log(2^n+n^2)} = e^{\log 2(1+o(1))} \rightarrow 2$.
- (16) Intanto $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(1+o(1))} \rightarrow \frac{1}{2}$. Inoltre, $\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2} = e^{\frac{1}{n} \log(2^{n+1}+n^2)} = e^{\log 2(1+o(1))} \rightarrow 2$. Quindi $(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2} \rightarrow 1$.
- (17) Si ha $\frac{(n^2+5n+7)e^{1/n}}{(n+1)(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})} = \frac{n^2(1+o(1))}{n(1+o(1))} \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{3} = n(1+o(1)) \cdot 2\sqrt{n}(1+o(1)) = 2n^{3/2}(1+o(1)) \rightarrow +\infty$.
- (18) Si ha $\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^{n/3} = \exp\left(\frac{n}{3} \log\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{3} \log\left(\frac{2}{3}(1+o(1))\right)\right) = \exp\left(-\frac{n}{3} \log \frac{3}{2}(1+o(1))\right) \rightarrow -\infty$.
- (19) Si ha $\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^{3/n} = \exp\left(\frac{3}{n} \log\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)\right) = \exp\left(\frac{3}{n} \log\left(\frac{2}{3}(1+o(1))\right)\right) = \exp\left(-\frac{3}{n} \log \frac{3}{2}(1+o(1))\right) \rightarrow 1$.
- (20) Si ha $\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)^n = \exp\left(n \log\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)\right) = \exp\left(n \log\left(\frac{3}{2}(1+o(1))\right)\right) = \exp\left(n \log \frac{3}{2}(1+o(1))\right) \rightarrow +\infty$.
- (21) Si ha $(\sqrt[n]{2}-1)^n = \exp(n \log(\sqrt[n]{2}-1)) = \exp(n \log o(1)) \rightarrow 0$. Oppure, poiché $0 < \sqrt[n]{2}-1 < \frac{1}{2}$, definitivamente, si ha, definitivamente, $0 < (\sqrt[n]{2}-1)^n < 2^{-n} \rightarrow 0$.
- (22) Si ha $\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n} = \exp\left(n^n \log\left(1 + \frac{1}{n!}\right)\right) = \exp\left(n^n \cdot \frac{1}{n!}(1+o(1))\right) \rightarrow +\infty$.
- (23) Si ha $\left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = \exp\left(n! \log\left(1 + \frac{1}{n^n}\right)\right) = \exp\left(n! \cdot \frac{1}{n^n}(1+o(1))\right) \rightarrow 1$.
- (24) Poiché $n^n = o((2n+1)^n)$, e $n^n = o((2n+2)^n)$ [in quanto, ad esempio $\frac{n^n}{(2n+1)^n} = \exp\left(n \cdot \log \frac{n}{2n+1}\right) = \exp\left(n \log\left(\frac{1}{2}(1+o(1))\right)\right) = \exp\left(-n \log 2(1+o(1))\right) \rightarrow 0$], si ha $\frac{(2n+1)^n + n^n}{(2n+2)^n - n^n} = \frac{(2n+1)^n(1+o(1))}{(2n+2)^n(1+o(1))} = \exp\left(n \cdot \log \frac{2n+1}{2n+2}\right)(1+o(1)) = \exp\left(n \log\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)\right)(1+o(1)) = \exp\left(-\frac{n}{2n+2}(1+o(1))\right)(1+o(1)) \rightarrow e^{-1/2}$.
- (25) Per la formula di Stirling si ha $\frac{\log(n!)}{n \log n} = \frac{\log(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1+o(1)))}{n \log n} = \frac{n \log n - n + \frac{1}{2} \log(2\pi n) + o(1)}{n \log n} = \frac{n \log n(1+o(1))}{n \log n} \rightarrow 1$.

$$(26) \text{ Si ha } n^2(2n + \sqrt{n})^{1/n} - \cos(n^3) = n^2 \sqrt[n]{2n} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{1/n} - \cos(n^3) = n^2(1 + o(1)) - \cos(n^3) = n^2(1 + o(1)) \rightarrow +\infty, \text{ poiché } (1 + \frac{1}{2\sqrt{n}})^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}})} \rightarrow 1.$$

$$(27) \text{ Si ha } (4n^n - (n+1)^n)^{1/n} = n \left\{ 4 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right\}^{1/n} = n(4 - e + o(1))^{1/n} = n(1 + o(1)) \rightarrow +\infty, \text{ poiché } 1 \leq (4 - e + o(1))^{1/n} \leq 4^{1/n} \rightarrow 1.$$

$$(28) \text{ Si ha } ((n+1)^{n+1} - n^{n+1})^{1/n} = n \sqrt[n]{n} \left\{ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - 1 \right\}^{1/n} = n(1 + o(1))(e + o(1) - 1)^{1/n} = n(1 + o(1)) \rightarrow +\infty, \text{ poiché } 1 \leq (e - 1 + o(1))^{1/n} \leq e^{1/n} \rightarrow 1.$$

$$(29) \text{ Si ha } \frac{(n^2 - 1)^n \sin(\frac{\pi n + 1}{4n - 1})}{(n - 2)^{2n} + \arctg(n! - 2^n)} = \frac{n^{2n} \exp(n \log(1 - \frac{1}{n^2})) \sin(\frac{\pi}{4}(1 + o(1)))}{n^{2n} \exp(2n \log(1 - \frac{2}{n})) + \frac{\pi}{2}(1 + o(1))} = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(n\left(-\frac{1}{n^2}\right)(1 + o(1)) + 2n\left(-\frac{2}{n}\right)(1 + o(1))\right)(1 + o(1)) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-4}(1 + o(1)) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2e^4}.$$

$$(30) \text{ Si ha } \frac{(3n^{2n^2} - (n^2 + 1)^{n^2})^2 + 4n^{n^2}}{(n^2 + 5)^{2n^2} + 6(n^2)^{n^2+n}} = \frac{n^{4n^2} (3 - (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2})^2 + 4n^{n^2}}{n^{4n^2} (1 + \frac{5}{n^2})^{2n^2} + 6n^{2n^2+n}} = \frac{(3 - e + o(1))^2 + 4n^{-3n^2}}{\exp(2n^2 \log(1 + \frac{5}{n^2})) + 6n^{-2n^2+n}} = \frac{(3 - e)^2 + o(1)}{\exp(2n^2 \frac{5}{n^2}(1 + o(1))) + 6n^{-2n^2+n}} \rightarrow \frac{(3 - e)^2}{e^{10}}.$$

□