1 Teorema di esistenza per le equazioni a variabili separabili

Theorem 1.1. *Siano date due funzioni $h : A \to \mathbb{R}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ con A e B aperti e si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = h(x(t))\, f(t) \\ x(t_0) = x_0 \ , \qquad (x_0, t_0) \in A \times B \end{cases} \tag{1.1}$$

1. ***Esistenza -*** *Se f e h sono continue esiste una soluzione del problema di Cauchy: esiste un intervallo aperto $I \ni t_0$ ed una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(I)$ tale che $u(t_0) = x_0$ e $\dot{u}(t) = h(u(t))\, f(t)$ per ogni $t \in I$.*

2. ***Unicità -*** *Inoltre se $h \in C^1(A)$ allora la soluzione è unica: se $v : J \to \mathbb{R}$ è un'altra soluzione del problema di Cauchy definita nell'intervallo aperto $J \ni t_0$, allora*
$$u(t) = v(t) \ , \qquad \forall t \in I \cap J \ .$$

Proof. **Esistenza -** Consideriamo due situazioni.

$\boxed{h(x_0) = 0}$. In tal caso definiamo

$$u(t) := x_0 \ , \qquad t \in B$$

allora si verifica facilmente che $u(t)$ verifica il Problema di Cauchy. Tale soluzione è detta **stazionaria**.

$\boxed{h(x_0) \neq 0}$. Ad esempio supponiamo $h(x_0) > 0$.

Dato che h è continua esiste $\varepsilon > 0$ tale che $h(x) > 0$ per ogni $x \in I_\epsilon(x_0)$ dove $I_\epsilon(x_0)$ è l'intervallo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Quindi è ben definita la funzione

$$H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(y)} dy \ , \qquad x \in I_\epsilon(x_0) \ .$$

Dalla definizione segue che $H(x_0) = 0$ e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, che

$$\frac{d}{dx} H(x) = \frac{1}{h(x)} > 0 \ , \qquad x \in I_\epsilon(x_0) \ , \tag{1.2}$$

ossia H è una funzione di classe $C^1(I_\epsilon(x_0))$ ed ha derivata positiva in tale intervallo. Ne segue che H è invertibile. La funzione inversa $H^{-1} : H(I_\epsilon(x_0)) \to I_\epsilon(x_0)$ è derivabile nell'intervallo $H(I_\epsilon(x_0))$ e, dalla (1.2), risulta

$$\frac{d}{dx} H^{-1}(y) = \frac{1}{H'(H^{-1}(y))} = h(H^{-1}(y)) \ , \qquad y \in H(I_\epsilon(x_0)) \ . \tag{1.3}$$

Infine dato che $H(x_0) = 0$ si ha che H^{-1} è definita in un intervallo di 0 e $H^{-1}(0) = x_0$.

Sia ora I un intervallo aperto di t_0 tale che $I \subset B$ e tale che limmagine della funzione

$$g(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)ds \ , \qquad t \in I \ .$$

sia nell'intervallo $H(I_\epsilon(x_0))$. Questo è possibile perchè g è continua e $g(t_0) = 0 \in H(I_\epsilon(x_0))$. Definiamo allora

$$u(t) := H^{-1}(g(t)) \ , \qquad t \in I \ .$$

Per definizione $u(t_0) = H^{-1}(g(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0$. Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t) &= (H^{-1})'(g(t))f(t) = (H^{-1})'\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) f(t) \overset{(1.3)}{=} h\left(H^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right)\right) f(t)\\ &= h(u(t))f(t)\end{aligned}$$

che completa la dimostrazione del'esistenza. La dimostrazione dell'unicità è omessa. □

2 Stima della formula di Stirling

Una stima della formula di Stirling si può ottenere utilizzando il metodo del trapezio usato in analisi numerica per l'approssimazione degli integrali definiti.

Lemma 2.1 (Metodo del trapezio)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe $f \in C^2[a, b]$ allora*

$$\int_a^b f = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a) - \frac{f''(z)}{12}(b - a)^3 \quad , \quad z \in [a, b]$$

Proof. Usando il polinomio di Taylor con il resto in forma di Lagrange si ha

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b - x) + \frac{f''(y(x))}{2!}(b - x)^2 \ , \qquad y(x) \in (b - x)$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \Big(f(b) - f'(x)(b - x) - \frac{f''(y(x))}{2!}(b - x)^2\Big)\\ &= f(b)(b - a) - \Big(f(x)(b - x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)dx\Big) - \int_a^b \frac{f''(y(x))}{2!}(b - x)^2 dx\\ &= f(b)(b - a) + f(a)(b - a) - \int_a^b f(x) - \int_a^b \frac{f''(y(x))}{2!}(b - x)^2 dx\end{aligned}$$

quindi

$$2\int_a^b f(x)dx = (f(b)+f(a))(b-a) - \int_a^b \frac{f''(y(x))}{2!}(b-x)^2 dx$$

Ora essendo $f \in C^2$ per Bolzano Weierstrass si ha

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x)\int_a^b \frac{1}{2!}(b-x)^2dx \le \int_a^b \frac{f''(y(x))}{2!}(b-x)^2 \le \max_{x\in[a,b]} f''(x)\int_a^b \frac{1}{2!}(b-x)^2dx$$

ossia

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x)\frac{1}{3!}(b-a)^3 \le \int_a^b \frac{f''(y(x))}{2!}(b-x)^2 \le \max_{x\in[a,b]} f''(x)\frac{1}{3!}(b-a)^3$$

e per il teorema dei valori intermedi esiste $z \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b \frac{f''(y(x))}{2!}(b-x)^2 = f''(z)\frac{1}{3!}(b-a)^3$$

in conclusione

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) - \frac{f''(z)}{12}(b-a)^3$$

□

Applichiamo il metodo del trapezio per dare una stima della formula di Stirling. Dato l'integrale $\int_1^n \ln(x)$, scomponendo il dominio di integrazione ed applicando il metodo del trapezio si ottiene

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(x) &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\ln(k+1)+\ln(k)}{2} - \frac{1}{12z_k^2}\right)\\ &= -\frac{\ln(n)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{12z_k^2}\\ &= -\frac{\ln(n)}{2} + \ln(n!) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{12z_k^2} = \ln\left(\frac{n!}{n^{1/2}}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{12z_k^2}\ ,\end{aligned}$$

dove $z_k \in [k,k+1]$ e si è osservato che

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)+\ln(k) = \ln(n) + 2\ln(n-1) + 2\ln(n-2) + \cdots + 2\ln(2) + \ln(1)$$

D'altro canto

$$\int_1^n \ln(x) = (x\ln(x) - x)_1^n = n\ln(n) - n + 1 = \ln(n^n) - n + 1$$

quindi

$$\ln(n^n) - n + 1 = \ln\left(\frac{n!}{n^{1/2}}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{12z_k^2} \iff \ln\left(\frac{n!}{n^{1/2}}\right) = \ln(n^n) - n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{12z_k^2}$$

ossia

$$n! = \left(n^n e^{-n}\sqrt{n}\right)\, e^{\left(1+\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{12z_k^2}\right)}$$

infine si può dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{12z_k^2}$ è convergente e quindi

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\,(c + o(1))\ ,\ \ c > 0$$