Calcolo I - Ingegneria Informatica M-Z - A.A. 2024/25
Esercizi Ripasso

Studio di funzioni

- Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

  specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

- Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(x^3 + 4x^2 - 2|x + 1|)$$

  specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Limiti e Taylor

- Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 4 per la seguente funzione:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + \sqrt{1 + x^2})$$

- Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cos^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{2n^3}{2n+1} \right)$$

Integrali

- Calcolare il seguente integrale definito in senso improprio

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \arctan(e^x)\, dx$$

- Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^{\alpha}}\right) dx$$

  Calcolarlo per $\alpha = 3$.

Numeri Complessi

- Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$8z^2 + |z|^3\overline{z}^2 = 0$$

- Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^2(|z|-3) = 3i|z|$$

Equazioni Differenziali

- Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\dot{x} = \frac{x(t+1)}{\sqrt{2-t-t^2}} \quad , \quad x(0) = -1$$

- Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^t \cos(t) \quad , \quad x(0) = 0 \ , \dot{x}(0) = 0$$

Derivabilità e Invertibilità

- Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} a + bx \ , & x \leq 0 \\ \\ \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln(1+x^2) + 1 + 2x \ , & x > 0 \end{cases}$$

  con $a, b \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di a, b la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$.

- Trovare per quale valore dei parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = e^{2x} + ae^x - 1$$

  risulta invertibile nel suo dominio di definizione. Per $a = 1$, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $f(0)$ ed il limite

$$\lim_{y \to 1} \frac{f^{-1}(y)}{\sin(y^2 - y)}$$

Soluzioni

Studio del grafico di funzioni

• *Tracciare il grafico della funzione*

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Il dominio di definizione è definito dalla disuguaglianza

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \iff x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Per quanto riguarda il comportamento ad infinito si ha

$$f(x) = e^{-x}|x|(1 + o(1)) \ \Rightarrow f(x) \stackrel{x\to+\infty}{\to} 0^+ \quad , \quad f(x) \stackrel{x\to-\infty}{\to} +\infty$$

quindi a $+\infty$ c'è un asintoto orizzontale, mentre a $-\infty$ non c'è asintoto obliquo.

Per quanto riguarda la monotonia, studiamo il segno della derivata prima escludento i punti $2, 3$ dove la derivata potrebbe non esistere:

$$f'(x) = e^{-x}\left(-\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\right) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}(-2x^2 + 10x - 12 + 2x - 5)$$

$$= \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}(-2x^2 + 12x - 17) \geq 0 \iff -2x^2 + 12x - 17 \geq 0 \iff x \in [3 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

Quindi

$$f'(x) \begin{cases} < 0\ , & x \in (-\infty, 2] \\ > 0\ , & x \in [3, 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ = 0\ , & x = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ \ (\textit{massimo relativo}) \\ < 0\ , & x \in (3 + \frac{\sqrt{2}}{2}), +\infty) \end{cases}$$

Si noti infine che la funzione non è derivabile in $x = 2$ e $x = 3$ in quanto

$$f'(x) = \frac{e^{-x}((-2x^2 + 12x - 17)}{2\sqrt{(x - 2)(x - 3)}}$$

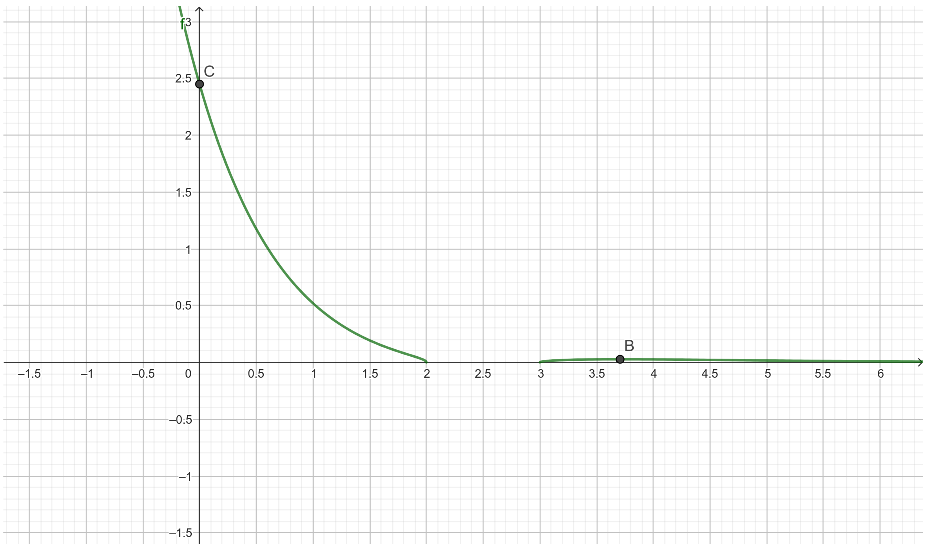
quindi per $x \to 2^-$

$$f'(x) = \frac{-e^{-2}}{2\sqrt{-(x - 2)}}(1 + o(1)) \to -\infty$$

mentre per $x \to 3^+$

$$f'(x) = \frac{e^{-3}}{2\sqrt{(x - 3)}}(1 + o(1)) \to +\infty$$

Un grafico della funzione è il seguente



$\square$

• *Tracciare il grafico della funzione*

$$f(x) = \arctan(x^3 + 4x^2 - 2|x+1|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento. Il **dominio** di definizione è $\mathbb{R}$. Per quanto riguarda gli asintoti si osservi che per $x \to \pm\infty$ si ha

$$f(x) = \arctan(x^3 + 4x^2 - 2|x+1|) = \arctan(x^3(1 + o(1)) \overset{x\to\pm\infty}{\to} \pm\pi/2$$

quindi ci sono due asintoti orizzontali.

Per quanto riguarda la derivabilià, ad eccezione del punto $x = -1$ dove si annulla l'argomento del modulo, la funzione è derivabile (C^∞) in tutto il suo dominio in qaunto composizione e somma di funzioni derivabili. Studiamo la monotonia in $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ studiando il segno della derivata. Dopodichè studieremo la derivabilià in $x = -1$. Si osservi che

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^3 + 4x^2 - 2|x+1|)^2}\,(3x^2 + 8x - 2\,segno(x-1))$$

Il segno dipende chiaramente solo dal termine a numeratore che è un polinomio di secondo grado le cui radici sono

$$x_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 6\,segno(x-1)}}{3}$$

Dividiamo lo studio spezzando il modulo. $\boxed{x > -1}$ si ha

$$x_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16+6}}{3} = \frac{-4 \pm \sqrt{22}}{3} \Rightarrow f'(x) \begin{cases} < 0 & x \in (-1, \frac{-4+\sqrt{22}}{3}) \\ 0 & x = \frac{-4+\sqrt{22}}{3} \\ > 0 & x \in (\frac{-4+\sqrt{22}}{3}, +\infty) \end{cases}$$

Per $\boxed{x < -1}$

$$x_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16-6}}{3} = \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{3} \Rightarrow f'(x) \begin{cases} > 0 & x \in (-\infty, \frac{-4-\sqrt{10}}{3}) \\ 0 & x = \frac{-4-\sqrt{10}}{3} \\ < 0 & x \in (\frac{-4-\sqrt{10}}{3}, -1) \end{cases}$$

Quindi i punti $x_1 = \frac{-4-\sqrt{10}}{3}$ e $x_2 = \frac{-4+\sqrt{22}}{3}$ sono, rispettivamente, un **massimo ed un minimo relativo**.

Per quanto riguarda $\boxed{x = -1}$ studiamo l'esistenza della derivata usando il corollario del teorema di Lagrange osservando che f è continua in -1 e che le derivate esistono in un intorno di -1:

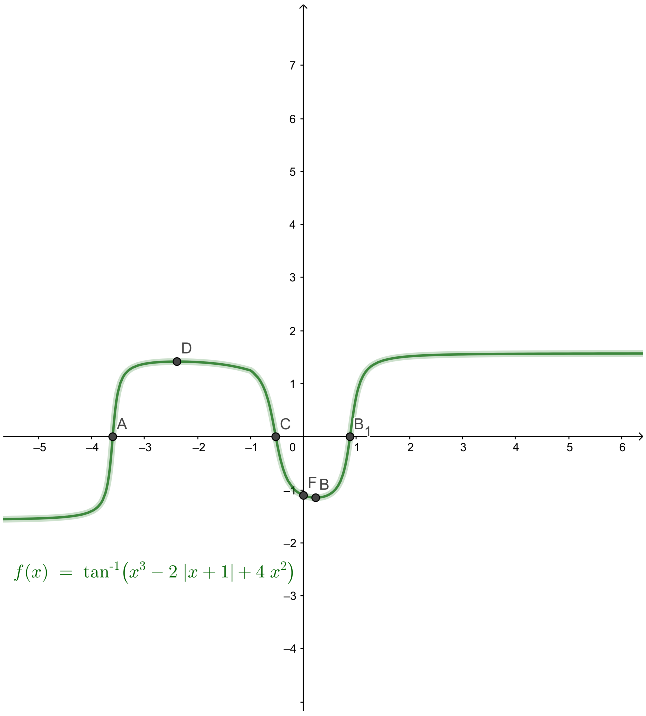
$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{1+(x^3+4x^2)^2}(3x^2+8x-2) = -\frac{7}{10} = f'_+(-1)$$

mentre

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{1+(x^3+4x^2)^2}(3x^2+8x+2) = -\frac{3}{10} = f'_-(-1)$$

Quindi -1 è **un punto angoloso** ma non una un estremo relativo della funzione visto che il segno della derivata destra e sinistra è negativo.

Un grafico della funzione è il seguente



$\square$

0.1 Limiti e Taylor

•*Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 4 per la seguente funzione:*

$$f(x) = \ln(e^{-x} + \sqrt{1+x^2})$$

Svolgimento. Approssimiamo l'argomento del logaritmo fino all'ordine 4 in $x = 0$:

$$\begin{aligned}
e^{-x} + \sqrt{1+x^2} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
&= 2 - x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}
\ln(e^{-x} + \sqrt{1+x^2}) &= \ln(2 - x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)) \\
&= \ln(2) + \ln(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)) \\
&= \ln(2) + \Big(- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big) - \frac{1}{2}\Big(- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\Big(- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^3 - \frac{1}{4}\Big(- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^4 \\
&\quad + o\Big(- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^4 \\
&= \ln(2) + \Big(- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{3}\Big(- \frac{x^3}{8} + 3\frac{x^4}{8}\Big) - \frac{1}{4}\Big(\frac{x^4}{16}\Big) + o(x^4) \\
&= \ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{x^3}{8} - \frac{19x^4}{192} + o(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Quindi per l'unicità del polinomio di Taylor si ha che il polinomio di ordine 4 è

$$\ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{x^3}{8} - \frac{19x^4}{192}$$

□

•*Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cos^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{2n^3}{2n+1} \right)$$

Svolgimento. Approssimiamo la successione $a_n = n^2 \cos^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Conviene riscrivere la successione nel modo seguente

$$a_n = n^2 \cos^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = n^2 e^{n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

Allora

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) &= 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^4+o(1/n^4)\\
&= 1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n^3}-\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{24n^4}+o(1/n^4)\\
&= 1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n^3}-\frac{11}{24n^4}+o(1/n^4)
\end{aligned}
$$

quindi usando l'approssimazione di $\ln(1+x)$ in 0 al secondo ordine si ha

$$
\begin{aligned}
&\ln\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n^3}-\frac{11}{24n^4}+o(1/n^4)\right)\\
&= -\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{11}{24n^4}+o(1/n^4)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{11}{24n^4}+o(1/n^4)\right)^2+o(1/n^4)\\
&= -\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n^3}-\frac{11}{24n^4}-\frac{1}{8n^4}+o(1/n^4) = -\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n^3}-\frac{1}{6n^4}+o(1/n^4)
\end{aligned}
$$

da cui si deduce

$$
n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^3}+o(1/n^3)\ .
$$

Allora

$$
\begin{aligned}
e^{n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)} &= 1-\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{6n^3}+o(1/n^3)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{6n^3}+o(1/n^3)\right)^2\\
&\quad -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{6n^3}+o(1/n^3)\right)^3+o(1/n^3)\\
&= 1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{48n^3}+o(1/n^3)\\
&= 1-\frac{1}{2n}-\frac{7}{8n^2}+\frac{15}{48n^3}+o(1/n^3)
\end{aligned}
$$

Ora

$$
\frac{2n^3}{2n+1} = n^2-\frac{n^2}{2n+1} = n^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\frac{n}{2n+1} = n^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{2n+1}
$$

In conclusione

$$
\begin{aligned}
&n^2\cos^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{2n^3}{2n+1} =\\
&\qquad = n^2-\frac{n}{2}-\frac{7}{8}+o(1)-\left(n^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+o(1)\right) = -\frac{9}{8}+o(1) \overset{n\to\infty}{\to} -\frac{9}{8}
\end{aligned}
$$

$\square$

Integrali

- *Calcolare il seguente integrale definito in senso improprio*

$$I = \int_0^\infty e^{-x} \arctan(e^x)\, dx$$

Svolgimento. Chiaramente la funzione è integrabile in senso improprio in quanto va a zero ad infinito esponenzialmente. Integrando per parti si ha

$$\int e^{-x} \arctan(e^x) dx = -e^{-x} \arctan(e^x) + \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx =$$

Sostituendo $t = e^{2x} \iff x = \frac{1}{2}\ln(t)$ da cui $dx = \frac{1}{2t} dt$

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)t} dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|$$

dove si è eseguita la decomposizione in fratti semplici. Quindi tornando alla variabile x una primitiva della funzione integranda è

$$F(x) = -e^{-x} \arctan(e^x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$$

dove si è tolto il modulo in quanto l'argomento del logaritmo è sempre positivo. Quindi

$$I = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = 0 + \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

□

- *Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:*

$$\int_0^\infty x \ln\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right) dx$$

Calcolarlo per $\alpha = 3$.

Svolgimento. Conviene dividere l'analisi in base al segno di α.

$\boxed{\alpha \leq 0}$ In questo caso l'integrale è definito in senso improprio in quanto il dominio di integrazione è illimitato. Per tali valori di α la funzione non è integrabile: infatti per $\alpha = 0$ si ha $f_\alpha(x) = x\ln(2)$ che non è integrabile a $+\infty$; per $\alpha < 0$ si ha

$$f_\alpha(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^{-|\alpha|}}\right) = x\ln(x^{|\alpha|})(1 + o(1)) = |\alpha| x \ln(x)(1 + o(1))$$

che non è integrabile.

$\boxed{\alpha > 0}$ In questo caso si parla di un integrale definito in senso improprio sia perchè il dominio di integrazione è illimitato e sia perchè la funzione non è definita in $x = 0$. Quindi:

- Per $\boxed{x \to \infty}$ si ha

$$f_\alpha(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right) = \frac{x}{x^\alpha}(1 + o(1)) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}(1 + o(1))$$

che risulta integrabile se e solo se $\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$.

- Per $\boxed{x \to 0^+}$ si ha

$$f_\alpha(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right) = -x\ln(x^\alpha)(1 + o(1)) = -\alpha x \ln(x)(1 + o(1))$$

che risulta integrabile per ogni α.

In conclusione per $\alpha > 0$ la funzione risulta integrabile nell'interbvallo $(0, +\infty)$ se, e solo se, $\alpha > 2$.

Per quanto riguarda il calcolo dell'integrale per $\alpha = 3$ integrando per parti si ha

$$\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) - \int \frac{x^2}{2} \frac{x^3}{1 + x^3} \frac{-3}{x^4} = \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) + \frac{3}{2} \int \frac{x}{1 + x^3} dx$$

Per calcolare il secondo integrale usiamo la relazione $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ dove $(1-x+x^2)$ è un polinomio irriducibile di grado 2. Decomponendo in fratti semplici

$$\frac{x}{1 + x^3} = \frac{A}{1 + x} + \frac{Bx + C}{1 - x + x^2}$$

da cui si ha $A = -1/3$, $B = -A = 1/3$, $C = -A = 1/3$ (dove l'ultima relazione si ottiene ponendo $x = 0$). Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{1 + x^3} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{3} \int \frac{x + 1}{1 - x + x^2} = -\frac{1}{3} \ln|1 + x| + \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{1 - x + x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - x + x^2} \\
&= -\frac{1}{3} \ln|1 + x| + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x - 1/2)^2 + 3/4} \\
&= -\frac{1}{3} \ln|1 + x| + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= -\frac{1}{3} \ln|1 + x| + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Una primitiva della funzione integranda è

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{1 + x}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)$$

Quindi

$$I = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

in quanto per $x \to \infty$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \frac{1}{x^3}(1 + o(1)) + \frac{1}{2} \ln(1 + o(1)) + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan(2x(1 + o(1)) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$$

per $x \to 0^+$

$$F(x) = -3\frac{x^2}{2}\ln(x)(1+o(1)) - \frac{1}{2}\ln(1+o(1)) - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(1/\sqrt{3}(1+o(1)) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

$\square$

Numeri Complessi

• *Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:*

$$8z^2 + |z|^3\overline{z}^2 = 0$$

Svolgimento. Posto $z = \rho e^{i\theta}$ e sostituito nell'eqazione si ha

$$8\rho^2 e^{2i\theta} + \rho^3\rho^2 e^{-2i\theta} = \rho^2(\rho^3 e^{-2i\theta} + 8e^{2i\theta}) = 0$$

Quindi $\rho = 0$ ossia $z = 0$ è soluzione dell'equazione. Inoltre

$$\rho^3 e^{-i4\theta} = -8 = 8e^{i(\pi+2k\pi)} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^3 = 8 \quad , \quad 4\theta = -\pi + 2k\pi$$

da cui si ottengono 4 soluzioni

$$z_k = 2e^{i\theta_k} \text{ dove } \theta_k = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, 3 \ .$$

□

• *Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:*

$$z^2(|z| - 3) = 3i|z|$$

Svolgimento. Posto $z = \rho e^{i\theta}$ e sostituito nell'equazione si ha

$$\rho^2 e^{2i\theta}(\rho - 3) = 3i\rho = 3\rho e^{i(\pi/2+2k\pi)}$$

Quindi $\rho = 0$ ossia $z = 0$ è soluzione dell'equazione. Inoltre

$$\rho e^{2i\theta}(\rho - 3) = 3e^{i(\pi/2+2k\pi)}$$

dalla quale eguagliando i moduli e gli angoli si ottengono le equazioni

$$\rho^2 - 3\rho - 3 = 0 \quad , \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ .$$

Dalla prima equazione si ha

$$\rho = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

quindi, dato che $\rho \geq 0$, l'unica soluzione ammissibile è $\rho = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$. Dalla seconda equazione, si hanno due soluzioni

$$z_k = \frac{3+\sqrt{21}}{2} e^{i\theta_k} \quad , \quad \theta_k = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, 1 \ ,$$

oltre alla soluzione $z = 0$. □

Equazioni Differenziali

• *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\dot{x} = \frac{t+1}{\sqrt{2-t-t^2}}x \quad , \quad x(0) = -1$$

Svolgimento. Si tratta di una equazione a variabili separabili definita nell'insieme $\mathbb{R} \times (-2, 1)$. L'equazione ammette inoltre una soluzione stazionaria: $x(t) = 0$. Separando le variabili si ha

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| = \int \frac{t+1}{\sqrt{2-t-t^2}}dt = \int \frac{t+1}{\sqrt{-(t+1/2)^2 + 9/4}}dt$$

Per il secondo integrale si ha

$$\int \frac{t+1}{\sqrt{-(t+1/2)^2 + 9/4}}dt = \frac{4}{9}\int \frac{t+1}{\sqrt{1-((2t+1)/3)^2}}$$

posto $\sin(u) = (2t+1)/3$ si ha $t = (3\sin(u) - 1)/2$ e $dt = (3/2)\cos(u)du$ quindi

$$\begin{aligned}\frac{4}{9}\int \frac{t+1}{\sqrt{1-((2t+1)/3)^2}} &= \frac{1}{3}\int \frac{3\sin(u)+1}{\cos(u)}\cos(u)du = -\cos(u) + \frac{u}{3} + C \\ &= -\cos(\arcsin((2t+1)/3)) + (1/3)\arcsin((2t+1)/3) + C\end{aligned}$$

quindi la doluzione generale è

$$x(t) = Ke^{-\cos(\arcsin((2t+1)/3)) + (1/3)\arcsin((2t+1)/3)}$$

ed imponendo il dato iniziale

$$x(0) = -1 = Ke^{-\cos(\arcsin(1/3)) + (1/3)\arcsin(1/3)} \;\Rightarrow\; K = -e^{\cos(\arcsin(1/3)) - (-1/3)\arcsin(1/3)}$$

otteniamo la costante con la quale si risolve il problema di Cauchy. Si osservi infine che

$$\cos(\arcsin((2t+1)/3)) = \sqrt{1-((2t+1)/3)^2}$$

□

• *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^t\cos(t) \quad , \quad x(0) = 0 \; , \dot{x}(0) = 0$$

Svolgimento. Si tratta di un'eqazione lineare del secondo ordine.

Omogenea. Le radici polinomio $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ associato all'omogenea sono $\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$. Quindi la generica soluzione dell'omogenea è

$$x_{om}(t) = Ae^{-t}\sin(t) + Be^{-t}\cos(t) \; .$$

Particolare. Dato che $1 \pm i$ non è radice del polinomio associato all'omogenea cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y(t) = Ce^t\sin(t) + De^t\cos(t) = e^t(C\sin(t) + D\cos(t))$$

Osserviamo che

$$\dot{y} = e^t(C\sin(t) + D\cos(t)) + e^t(C\cos(t) - D\sin(t))$$

e

$$\ddot{y} = e^t(C\sin(t)+D\cos(t))+2e^t(C\cos(t)-D\sin(t))+e^t(-C\sin(t)-D\cos(t)) = 2e^t(C\cos(t)-D\sin(t))$$

Sostituendo y nell'equazione generale si ha

$$\begin{aligned} e^t\cos(t) &= \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y \\ &= 2e^t(C\cos(t) - D\sin(t)) + 2e^t(C\sin(t) + D\cos(t)) + 2e^t(C\cos(t) - D\sin(t)) \\ &\quad + 2(Ce^t\sin(t) + De^t\cos(t)) \\ &= 2e^t\cos(t)(C + D + C + D) + 2e^t\sin(t)(-D + C - D + C) \\ &= 4(D + C)e^t\cos(t) + 4Ce^t\sin(t) \end{aligned}$$

da cui si ottengono le equazioni

$$4(D + C) = 1 \quad , \quad 4C = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad D = -1/4$$

quindi una soluzione particolare è

$$y(t) = -(1/4)e^t\cos(t)$$

e la soluzione generale è

$$x_{Gen}(t) = x_o m(t) + y(t) = Ae^{-t}\sin(t) + Be^{-t}\cos(t) - (1/4)e^t\cos(t)$$

Imponiamo infine le condizioni iniziali

$$x(0) = 0 = B - (1/4) \quad \Rightarrow \quad B = (1/4)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = A - B - (1/4) = A - (1/2) \quad \Rightarrow \quad A = (1/2)$$

Quindi la asoluzione del problema di Cauchy è

$$x_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{4}\cos(t)(e^{-t} - e^t)$$

□

Derivabilità e Invertibilità

- *Data la funzione*

$$f(x) := \begin{cases} a + bx \ , & x \le 0 \\ \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln(1+x^2) + 1 + 2x \ , & x > 0 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di a, b la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Imponiamo la condizione di continuità:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = f(0) = a$$

allora per $x \to 0^+$ si ha

$$f(x) = f_2(x) = \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln(1+x^2) + 1 + 2x = \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot x^2(1+o(1)) + 1 + 2x \to 1 \ ,$$

in quanto, anche se $\sin\left(x + 1/x\right)$ non ammette limite per $x \to 0^+$ (l'argomento tende a $+\infty$) $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 = 0$ per confronto essendo $\sin(x+1/x)$ limitata. Quindi f **è continua** per $\boxed{a = 1 \ , \ b \in \mathbb{R}}$.
Imponiamo che sia derivabile: ossia che siano finiti ed uguali i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Ora

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f_1(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx}{x} = b$$

mentre per $x \to 0^-$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f_2(x) - 1}{x} = \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \cdot \ln(1+x^2) + 1 + 2x - 1}{x} \\ &= \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \cdot x^2(1+o(1)) + 2x}{x} = \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot x \cdot (1+o(1)) + 2 \to 2 \end{aligned}$$

Quindi la **funzione è derivabile anche in** 0 **per** $\boxed{a = 1, b = 2}$.

□

- *Trovare per quale valore dei parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = e^{2x} + ae^x - 1$$

risulta invertibile nel suo dominio di definizione. Per $a = 1$, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $f(0)$ ed il limite

$$\lim_{y\to 1} \frac{f^{-1}(y)}{\sin(y^2 - y)} \ .$$

Svolgimento. Trattandosi di una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ il problema posto equivale ad imporre che la derivata prima della funzione non abbia cambiamenti di segno nel suo dominio di definizione. Osserviamo che

$$f'(x) = 2e^{2x} + ae^x = e^x(2e^x + a)$$

se $a < 0$ si avrebbe che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 \ , & x < \ln(-a/2) \ ; \\ > 0 \ , & x > \ln(-a/2) \ . \end{cases}$$

Quindi non sarebbe strettamente monotona. Se $a \geq 0$ si ha che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione risulta strettamente crescente.

Per $a = 1$, quindi, la funzione è invertibile e la derivata della funzione inversa in $f(0) = 1$ è data dalla relazione

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

Allora per $y \to 1$ si ha

$$\frac{f^{-1}(y)}{\sin(y^2 - y)} = \frac{f^{-1}(1) + \left(f^{-1}\right)'(1)(y-1) + o(y-1)}{\sin(y(y-1)} = \frac{(1/3)(y-1) + o(y-1)}{y(y-1) + o(y(y-1))} = \frac{1}{3}(1+o(1)) \to \frac{1}{3}$$

□