8 Integrazione

8.1 Primitive ed integrali definiti

1. Calcolare i seguenti integrali definiti/indefiniti (sostituzione)
   (a) $\int_1^e \frac{\ln(2x)}{x}$
   (b) $\int_0^1 \frac{\arctan(2x)}{2+8x^2}$
   (c) $\int \sinh(\cos(x^3))\sin(x^3)x^2$
   (d) $\int \frac{\sqrt[3]{\tan(\ln(2x))}}{\cos^2(\ln(2x)x}$
   (e) $\int \tan^2(x)$
2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti(per parti e/o sostituzione)
   (a) $\int (2x^2+x)\sin(x)$
   (b) $\int \arcsin(x)$
   (c) $\int e^{-3x}(x^3+2x)$
   (d) $\int e^{x^2}(x^3+x)$
   (e) $\int e^{2x}\cos(x)$
   (f) $\int \cos(2x)\sin(x)$
   (g) $\int \cos^4(x)\sin^3(x)$
   (h) $\int \cos^2(x)\sin^2(x)$
3. Calcolare i seguenti integrali definiti/indefiniti di funzioni razionali
   (a) $\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)}$
   (b) $\int \frac{x+1}{x^2+x+2}$
   (c) $\int_0^{1/2} \frac{x+2}{x^2-1}$
   (d) $\int \frac{1}{(x-3)(x^2-4x+3)}$
   (e) $\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2-3x+2)}$
   (f) $\int \frac{1}{x\,(x^2+1)^2}$
   (g) $\int \frac{3}{x(x^2-1)(x^2+x)}$
4. Date le funzioni

$$g(x) := \frac{|x|}{1+x^2} \quad ; \quad f(x) := \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 1 \\ \frac{x}{(1+x^2)^2} & x < 1 \end{cases} \quad ; \quad h(x) := \frac{\tan(x)\,e^{x^2}}{2+x^2}$$

   calcolare gli integrali definiti

$$\int_{-2}^{2} g(x) \quad ; \quad \int_{-2}^{2} f(x) \quad ; \quad \int_{-1}^{1} h(x)$$

8.2 Integrali definiti in senso improprio

1. Studiare al variare del parametro l'integrabilità in senso improprio delle sguenti funzioni

   (a)
   $$\int_0^{+\infty} (x^\alpha + \sqrt{x}\sin(x)) \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 , \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$

   (b)
   $$\int_1^{+\infty} (\ln(x))^\alpha (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x^2}}) , \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$

   (c)
   $$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-x} - e^{-\sqrt{x}}) \sin(x^2)}{\arctan(x^\alpha)} , \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$

   (d)
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\left(e^{-x} - e^{-\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})}\right)\sin(x^3)}{\arctan(x^\alpha)} , \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$

2. Calcolare i seguenti integrali e integrali impropri.

   (a) Discutere, al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$, l'integrabilità in senso improprio in $(0, +\infty)$ della funzione
   $$f_\alpha(x) = \frac{4\ \ln(t)\, t}{(t^2+1)^{3/2}} (t - \sin(t))^\alpha .$$
   Calcolare l'integrale per $\alpha = 0$ ossia $\int_0^{+\infty} \frac{4\ \ln(t)\, t}{(t^2+1)^{3/2}}\, dt$.

   (b) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0, +\infty)$ della funzione
   $$f_\alpha(x) = \frac{\ln(x + 5\sqrt{x} + 6)}{(x^\alpha + 3)^2\, x^\alpha} .$$
   Calcolare l'integrale per $\alpha = 1/2$ ossia $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+5\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+3)^2\, \sqrt{x}}\, dx$.

   (c) Discutere, al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0, +\infty)$ della seguente funzione
   $$f(x) = \frac{(2x+5) \cdot (x - \sin(x))^\alpha \cdot \ln(x+3)}{(x^2+5x+6)^2 \cdot \ln^{2\alpha}(x+1)}\, dx ,$$
   e calcolare l'integrale per $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ per $\alpha = 0$.

   (d) Data la funzione
   $$f(x) = \frac{\ln(x^8 - 1)}{(x^4 - 1)^2} 4x^3 .$$
   calcolarne l'integrale indefinito $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

   (e) Data la funzione
   $$f(x) = \frac{1}{(x+2)^\alpha} \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right) .$$
   a) Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ l'integrabilità in senso improprio della funzione $f(x)$ nell'ntervallo $(-2, +\infty)$.
   b) Calcolare l'integrale $\int_{-2}^{+\infty} f(x)dx$ per $\alpha = 1/2$.

   (f) Data la funzione
   $$f(x) = \frac{\cos^2(x)}{(\sin^2(x) - \cos^2(x))(\sin^2(x) + 4\cos^2(x))}.$$
   calcolarne l'integrale $\int_0^{\pi/6} f(x)\ \mathrm{d}x$.

(g) Discutere, al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$, l'integrabilità in senso improprio in $[0, +\infty)$ della funzione

$$f(x) = \frac{e^x \ln(e^{2x} + 3e^x + 2)}{(e^x + 1)^\alpha}\ dx\ ,$$

e calcolare l'integrale per $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ per $\alpha = 2$.

(h) Studiare l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(1, +\infty)$ della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2(\sqrt{x^2-1})(1+\sqrt{x^2-1})^2}$$

e calcolare l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

(i) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x \ln(x^4 - 1)}{(x^2 - 1)^2}\ .$$

calcolare l'integrale indefinto $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

(j) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(2e^{2x} - 6e^x + 4)e^x}\ ,$$

calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

(k) Data la funzione

$$f(x) = \frac{(2x+4)\ln(x+1)}{(x^2+4x+3)^2}\ .$$

i. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

ii. Stabilire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intevallo $[0, +\infty)$ e, nel caso affermativo, calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.

(l) Data la funzione

$$f(x) = \frac{(4x+1)\ln(1+2x)}{(2x^2+x)^\alpha}\ ,$$

(a) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio di $f(x)$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.

(b) Calcolare per $\alpha = 2$ l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

(m) Studiare l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0, +\infty)$ della seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + \sqrt[3]{x})\ln(|1 - \sqrt{x}|)}\ .$$

(n) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^6 - 1)}{(x^3 - 1)^2}\, 3\, x^2\ .$$

i. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

ii. Stabilire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intevallo $(2, +\infty)$ e, nel caso affermativo, calcolare $\int_2^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.

(o) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^{2/5} + 1)}{(x^{1/5} + 2)^2\, x^{4/5}}\ \mathrm{d}x\ .$$

i. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

ii. Stabilire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intevallo $(0, +\infty)$ e, nel caso affermativo, calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.

iii. Determinare l'intervallo massimo $(\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, per cui esista in senso improprio l'integrale $\int_\alpha^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.

8.3 Funzioni Integrali

1. Calcolare i seguenti limiti
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{-t^2} - \cos(t\sqrt{2}))dt}{x\sin(x^4)} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x (e^{-t^2}\frac{\sin(t)}{t})dt}{\sin(x^2)}$$

2. Provare che la funzione $F(x)$ definita da
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad \text{dove} \qquad f(x) := \begin{cases} \sin(x)/x \ , & x \neq 0 \\ 1 \ , & x = 0 \end{cases}$$
risulta definitivamente crescente in $x = 0$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := \int_0^x e^{-t^2}dt \quad , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$
   (a) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 5 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x)$.
   (b) Provare che la funzione ínvertivbile in $\mathbb{R}$ e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = f(x_0)$ con $x_0 = 0$

4. Studiare le seguenti funzioni integrali.
   (a) Data la funzione integrale
$$G(x) := \int_0^x e^{-t^2}dt$$
      i. Determinare il dominio di definizione e l'esistenza di eventuali asintoti (si noti che $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
      ii. Stabilire se la funzione è simmetrica.
      iii. Studiare la monotonia e l'esistenza di punti di massimo/minimo.
      iv. Studiare la convessità.

   Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

5. Data la funzione
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$$
   (a) Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la funzione è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0, \infty)$.
   (b) Calcolare $\Gamma(n)$ per $n \in \mathbb{N}$ (usare il principio di induzione).

6. Data la funzione integrale
$$F(x) := \int_0^x \ln(\cosh(t))dt$$
   (a) Determinare il dominio di definizione e l'esistenza di eventuali asintoti.
   (b) Stabilire se la funzione è simmetrica.
   (c) Studiare la monotonia e l'esistenza di punti di massimo/minimo.
   (d) Studiare la convessità.

   Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

7. Data la funzione integrale
$$F(x) := \int_0^x \arctan(x^3 + 1)dt$$
   (a) Determinare il dominio di definizione e l'esistenza di eventuali asintoti.
   (b) Studiare la monotonia e l'esistenza di punti di massimo/minimo.
   (c) Studiare la convessità.

   Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

8.3.1 Esempi di studio di funzioni integrali

1) Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \arctan(t+2)\, dt$$

a) Calcolare il dominio, punti di non derivabilità ed esistenza degli asintoti;

b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Svolgimento. La funzione integranda

$$f(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \arctan(t+2)$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$. Quindi il dominio di definizione di $F(x)$ è $\mathbb{R}$ e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda l'esistenza degli asintoti si osservi che per $t \to \infty$ si ha

$$f(t) = \frac{\pi}{2}(1 + o(1))$$

quindi f non è integrabile in senso improprio a $\pm\infty$. In particolare dallo setudio del segno della funzione integranda si ha $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = +\infty$. Per vedere l'esistenza degli asintoti obliqui si osservi che a $+\infty$ usando de l'Hospintal si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2$$

e

$$\begin{aligned}
F(x) - x\frac{\pi}{2} &= \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \arctan(t+2)dt - x\frac{\pi}{2} = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \arctan(t+2)dt - \int_0^x \frac{\pi}{2}dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t^2} \arctan(t+2) - \frac{\pi}{2}\right) dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t^2} (\pi/2 - \arctan\left(\frac{1}{t+2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) dt \\
&= \int_0^x \left(-\frac{\pi}{2(1+t^2)} - \frac{t^2}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{t+2}\right)\right) .
\end{aligned}$$

Si osservi che il primo addendo è integrabile a $+\infty$ in quanto per $x \to +\infty$

$$-\frac{\pi}{2(1+t^2)} = -\frac{\pi}{2x^2}(1 + o(1))$$

mentre il secondo addendo non è integrabile in quanto per $x \to +\infty$

$$\frac{t^2}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{t+2}\right) = \frac{t^2}{1+t^2}\frac{1}{t+2}(1 + o(1)) = \frac{1}{t}(1 + o(1))$$

Quindi complessivamente la funzione integranda non è integrabile in senso improprio e

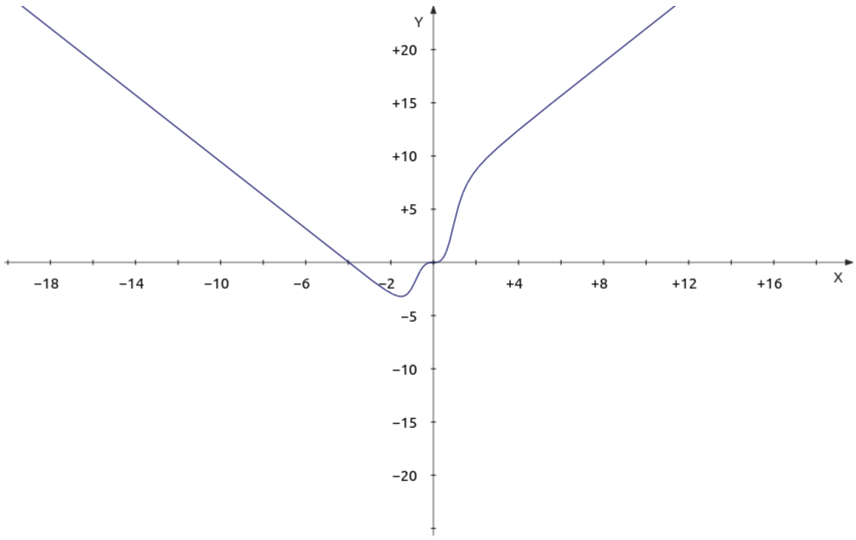
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) - x\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\pi}{2(1+t^2)} - \lim_{x\to+\infty} \int_0^x -\frac{t^2}{1+t^2} \arctan(\frac{1}{x+2}) = -\infty$$

ossia la funzione non ha asintoto obliquo a $+\infty$. In maniera analoga si dimostra che $\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} = -\frac{\pi}{2}$ e che $\lim_{x\to-\infty} F(x) + \pi/2x = -\infty$.

Per quanto riguarda la monotonia si ha

$$F'(x) = f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \arctan(x+2) \;\; ; \;\; F'(x) > 0 \iff x > -2 \;\; ; \;\; F'(x) = 0 \iff x = 0, -2$$

Da cui si deduce che $x = 0$ è un flesso e che $x = -2$ è un minimo relativo (assoluto). Un grafico qualitativo della funzione è il seguente



□

1a) *Data la funzione*

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^3}}{1+e^{2t^3}}\, dt$$

a) Calcolare il dominio, punti di non derivabilità ed esistenza degli asintoti;

b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Svolgimento. La funzione integranda

$$f(t) = \frac{e^{t^3}}{1+e^{2t^3}}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$. Quindi il dominio di definizione di $F(x)$ è $\mathbb{R}$ e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^{t^3}}{1+e^{2t^3}}\, dt \overset{u=-t}{=} -\int_0^x \frac{e^{-u^3}}{1+e^{-2u^3}}\, du = -\int_0^x \frac{e^{u^3}}{1+e^{2u^3}}\, du = -F(x)\ .$$

Ossia $F(x)$ é una funzione dispari. Ci limiteremo a studiare il comportamento per $x \geq 0$. Per quanto riguarda l'esistenza degli asintoti si osservi che per $t \to \infty$ si ha

$$t \to +infty\ ,\ f(t) = \frac{1}{e^{t^3}}(1+o(1))\ ,$$

ossia $F(x)$ è integrabile in senso improprio a $+\infty$. Quindi F ha un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \lim_{x \to +infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t^3}}{1+e^{2t^3}} > 0\ .$$

Per quanto riguarda la monotonia si ha

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^{x^3}}{1+e^{2x^3}} > 0$$

ossia F è strettamente crescent e non ha ne max ne minimi relativi.

Infine per la convessità si ha

$$F''(x) = f'(x) = \frac{1}{(1+e^{2x^3})^2}\left(3x^2e^{x^3}(1+e^{2x^3}) - 6x^2e^{3x^3}\right) = \frac{3x^2e^{x^3}}{(1+e^{2x^3})^2}\left(1-e^{2x^3}\right)$$

quindi

$$F''(x) > 0 \iff 1 > e^{2x^3} \iff 2x^3 < 0 \iff x < 0$$

Ossia $F(x)$ è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. Il grafico di F è molto simile a quello dell'arcotangente con asitoti orizzontali $y = \int \int_0^{-\infty} \frac{e^{t^3}}{1+e^{2t^3}}$ e $y = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t^3}}{1+e^{2t^3}}$. □