Polinomio di Taylor

1. Calcolare il polinomio di Taylor ed il resto in forma di Peano nel punto x_0 e all'ordine N delle seguenti funzioni

   (a) $f(x) = \sin(-x^2)$, $x_0 = 0$, $N = 7$ $[-x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^9)]$

   (b) $f(x) = (\cos(x + 2x^2))^2$, $x_0 = 0$, $N = 4$ $[1 - x^2 - 4x^3 - \frac{11}{3}x^4 + o(x^4)]$

   (c) $f(x) = \sin(x^2)$, $x_0 = 1$, $N = 3$.
   $[\sin(1)+2\cos(1)(x-1)+(\cos(1)-2\sin(1)(x-1)^2-\frac{1}{3}(6\sin(1)+4\cos(1))(x-1)^3+o((x-1)^3)]$

   (d) $f(x) = \ln(2x^2)$, $x_0 = 1$, $N = 3$.
   $[\ln(2) + 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)]$

   (e) $f(x) = \arctan(3x-3)\cosh(x-1)$ $x_0 = 1$, $N = 3$. $[3(x-1) - \frac{15}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^4)]$

   (f) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ $x_0 = 1$, $N = 4$.
   $[1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 - \frac{3}{2}(x-1)^4 + o((x-1)^4)]$

   (g) $f(x) = e^{-x^2/2} + \cos(x)$ $x_0 = 0$, $N = 2$, $N = 4$. $[2 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^6)]$

   (h) $f(x) = \ln(\cos(-2x^2))$, $x_0 = 0$, $N = 5$. $[-2x^4 + o(x^6)]$

   (i) $f(x) = (\cos(x))^x$, $x_0 = 0$, $N = 4$. $[1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)]$

2. Provare le seguenti approssimazioni nel punto x_0

   (a) $f(x) = x\arctan(x) - \sin(x^2) = -\frac{x^4}{3}(1 + o(1))$ $x_0 = 0$.

   (b) $f(x) = \sqrt{2}\arctan(x/\sqrt{2}) - \sin(x) = \frac{x^5}{24}(1 + o(1))$ $x_0 = 0$.

   (c) $f(x) = \sqrt{2}\arctan(x-2)\sqrt{2}) - \sin(x-2) = \frac{(x-2)^5}{24}(1 + o(1))$ $x_0 = 2$.

   (d) $f(x) = e^{x-x^2/2} - 1 - \arctan(x) = -\frac{x^4}{12}(1 + o(1))$ $x_0 = 0$.

   (e) $f(x) = xe^{x-x^2/2} + 1 - \frac{1}{1-x} = -x^3(1 + o(1))$ $x_0 = 0$.

   (f) $f(x) = \cos^{-1}(x) - \cosh(x) = \frac{x^4}{6}(1 + o(1))$ $x_0 = 0$.

   (g) $f(x) = \ln(x)\arctan(\ln(x)^{-1}) - \cos(x^{-1}) = -\frac{1}{3\ln^2(x)}(1 + o(1))$ $x_0 = +\infty$

   (h) $f(x) = \arctan(\ln(x)) + \frac{\pi}{2}\cos(x)) = \frac{1}{\ln(x)}(1 + o(1))$ $x_0 = 0^+$

   (i) $f(x) = \ln(1 + x)\sin(x) - e^x\arctan(x^2) = -\frac{3}{2}x^3(1 + o(1))$ $x_0 = 0$

   (j) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x} = x^{-1}(1 + o(1))$ $[x_0 = +\infty]$.

   (k) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} - x + \frac{1}{3} = -\frac{x^{-1}}{9}(1 + o(1))$ $[x_0 = -\infty]$.

   (l) $f(x) = (1 + x^2)^x - e^{x^3} + e^{-1/x} = -\frac{x^5}{2}(1 + o(1))$ $x_0 = 0$

   (m) $f(x) = x^x - x^{\arctan(x)} = \frac{1}{3}\ln(x)x^3(1 + o(1))$ $x_0 = 0$

3. Calcolare i seguenti limiti e stabilire, in caso di infiniti o infinitesimi, se esiste un ordine.

   (a) $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1\right)+\frac{x^{1/2}}{2}$ [0^-, ordine $1/2$].

   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+x^3\sin(1/x))}-e^x}{x^2}$ [0, nessun ordine].

   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+x^2\sin(1/x))}-e^x}{x^2}$ [$\nexists$]

   (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(\frac{x^2}{\pi})-\frac{\pi}{2}\cos(\frac{2}{x})}{\cos(\frac{1}{x})-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ [-2π]

   (e) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(2x+x^2)+2x\ln(1+x)-e^{-3x^3}}{\cos(x^2)-1}$

   (f) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-(\cos(x))^2+e^{-\frac{1}{x}}}{\arctan(\sin(x^2))-2x^4}$

   (g) $\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(\sqrt[2]{\cosh(x)}\right)-\frac{x}{2}\sin(x)}{x(\ln(1-5x+x^2))^3}$

   (h) $\lim_{x\to 1}\frac{x\ln(x)-\ln(x)}{xe^{x-1}-e^{x-1}-x+1}$

   (i) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln\left(\sqrt[3]{\frac{x+x^2}{2}}\right)+(x-1)^3}{x^x-1-\ln(x)}$

   (j) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+x^3+x^2}-\sqrt{x^4+x^3}$

   (k) $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-\sqrt[4]{x^4+x^3}\right)$

   (l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)-\ln(-x)+1-\sqrt{1-2/x}}{\arctan(x)+\pi/2+\sin(1/x)}$

   (m) $\lim_{n\to\infty}\ln(n!)\big(-\pi/2+\arctan(n)+\ln(n^3+n^2+n/2)-\ln(n^3)\big)$

4. Calcolare gli asintoti a $+\infty$ delle seguenti funzioni e stabilire se, definitivamente a $+\infty$ il grafico della funzione maggiora o minora l'asintoto:

   (a) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}$

   (b) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

   (c) $f(x)=\ln(e^x+x)$

5. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione invertibile e derivabile due volte in (a,b) e tale che $f'(x)\neq 0$ per $x\in(a,b)$. Dimostrare che f^{-1} è derivabile due volte in (a,b) e che

$$\left(f^{-1}\right)''(y)=-\frac{f''(f^{-1}(y))}{\left(f'(f^{-1}(y))\right)^3}\ ,\quad y\in f(a,b)\ .$$

6. Date le funzioni

$$f(x)=\sinh(x)+x^2+1\quad;\quad g(x)=\arctan(x)-x^2\quad;\quad h(x)=e^x+2(x-1)\ .$$

(a) Studiare gli insiemi in cui sono invertibili le funzioni f, g e h.

(b) Provare che f, g e h sono invertibili in un intorno del punto $x_0 = 0$.

(c) Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine $n = 2$ di f^{-1}, g^{-1} eh^{-1} nei punti $f(0)$,$g(0)$ e $h(0)$ ripsettivamente.

(d) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^{-1}(x)+\ln(x)}{(x-1)(\sqrt[5]{x}-1)} \;,\; \lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)-\sin(x+x^2)}{x\ln(1-x)} \;,\; \lim_{x\to -1} \frac{h^{-1}(x)+e^{\frac{x+1}{-3}}}{(x-1)\ln(x-1)}$$

Esempi

► *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{x}{2}}\ln(1+x)-\sin(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)-\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

Svolgimento.

Cominciamo con l'osservare che il denominatore presenta una forma indeterminata $\infty-\infty$. Usando le proprietà algebriche del logaritmo, la funzione si può riscrivere

$$f(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}\ln(1+x)-\sin(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)-\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{e^{\frac{x}{2}}\ln(1+x)-\sin(x)}{\ln\left(\frac{x^3+1}{x^3}\cdot x^3\right)}=\frac{e^{\frac{x}{2}}\ln(1+x)-\sin(x)}{\ln(x^3+1)}\ .$$

Di conseguenza per $x\to 0^+$ il denominatore si approssima

$$\ln(1+x^3)=x^3+o(x^3)=x^3(1+o(1))\ .$$

Di conseguenza il limite che vogliamo calcolare è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per quanto riguarda il numeratore, cominciamo sviluppando le funzion i che definiscono il numeratore fino al secondo ordine non banale, e vediamo se l'approssimazione è sufficiente per risolvere la forma indeterminata. Usando gli sviluppi di Taylor in $x=0$ di e^x, $\ln(1+x)$ e $\sin(x)$ si deduce che

$$\begin{aligned}
e^{x/2}&=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4\cdot 2!}+o(x^2)\ ,\\
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\ ,\\
\sin(x)&=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
e^{x/2}\cdot\ln(1+x)-\sin(x)&=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4\cdot 2!}+o(x^2)\right)\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\\
&=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+o(x^4)+o(x^3)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&=o(x^2)-\frac{x^3}{4}+o(x^3)+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+o(x^4)+o(x^3)+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&=o(x^2)\ .
\end{aligned}$$

Infatti, i termini di ordine minore od uguale 2 si cancellano, rimane un resto di ordine 2, $o(x^2)$, e tutti gli altri termini sono $o(x^2)$. Questo non permette di risolvere la forma indeterminata presente nel limite ed indica che l'approssimazioni che abbiamo fatto non sono sufficienti. Quindi dobbiamo andare ad ordini successivi. Si osservi, tuttavia, che il resto $o(x^2)$ presente nel calcolo precedente, deriva dal prodotto di $o(x^2)$, presente nell'approssimazione di $\ln(1+x)$, con 1 presente nell'approssimazione di $e^{x/2}$, ossia

$$\begin{aligned}
e^{x/2}\cdot \ln(1+x) &= \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4\cdot 2!}+o(x^2)\right)\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\
&= x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+o(x^4)+o(x^3)\\
&= o(x^2)
\end{aligned}$$

Per cui, per risolvere la forma indeterminata sarà sufficiente approssimare $\ln(1+x)$ fino al terzo ordine non banale:

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\ .$$

Se inseriamo questa espressione nel conto di prima si ha

$$\begin{aligned}
e^{x/2}\cdot \ln(1+x)-\sin(x) &= \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+\frac{x^5}{24}+o(x^5)+o(x^3)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= \frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+\frac{x^5}{24}+o(x^5)+o(x^3)+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= \frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= \frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= \frac{3}{8}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Quindi il numeratore è un infinitesimo di ordine 3. Di conseguenza si ha

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}\ln(1+x)-\sin(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)-\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{3/8x^3(1+o(1)}{x^3(1+o(1))} = \frac{3}{8}(1+o(1)) \xrightarrow{x\to 0^+} \frac{3}{8}$$

► *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x+\frac{x^2}{2})+x-\frac{x^3}{6}}{\arctan(x^2)-x\sin(x)}$$

Svolgimento

Si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Studiamo separatamente il numeratore ed il denominatore appossimando, ove possibile, le funzioni con il polinomio di Taylor. Per quanto riguarda il numeratore osservado che $(-x+x^2/2)$ tende a zero possiamo approssimare $\ln(1-x+x^2/2)$ usando lo viluppo di Taylor di $\ln(1+x)$ per $x \to 0$ a poi sfruttare le regole di calcolo del polinomio di Taylor di funzioni composte. Cominciamo approssimando il logaritmo fino all'ordine 3:

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)+x-\frac{x^3}{6} &= \\
&= \left(-x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^3+o\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^3+x-\frac{x^3}{6} \\
&= \left(-x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^3)+x-\frac{x^3}{6} \\
&= -x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x^2-x^3)-\frac{x^3}{3}+o(x^3)+x-\frac{x^3}{6} \\
&= -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)+x-\frac{x^3}{6} \\
&= o(x^3)
\end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $o\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^3 = o(x^3)$ e si sono trascurati tutti i termini di ordine più grandi di 3. Saliamo quindi di un grado nell'approssimazione del logaritmo:

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)+x-\frac{x^3}{6} &= \\
&= \left(-x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^4+o\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^4+x-\frac{x^3}{6} \\
&= \left(-x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^4+o(x)^4+x-\frac{x^3}{6} \\
&= -x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x^2-x^3+\frac{x^4}{4})+\frac{1}{3}(-x^3+\frac{3}{2}x^4)-\frac{x^4}{4}+o(x)^4+x-\frac{x^3}{6} \\
&= -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)+x-\frac{x^3}{6} \\
&= -\frac{x^4}{8}+\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)=\frac{x^4}{8}+o(x^4)\ ,
\end{aligned}$$

quindi il numeratore è un infinitesimo di ordine 4. Per quanto riguarda il denominatore usiamo i primi due ordini non banali dello sviluppo di $\arctan(x)$ e $\sin(x)$:

$$\arctan(x^2)-x\sin(x) = x^2-\frac{x^6}{3}+o(x^6)-x(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = -\frac{x^6}{3}+o(x^6)+\frac{x^4}{6}+o(x^4) = \frac{x^4}{6}+o(x^4)$$

In conclusione

$$\frac{\ln(1-x+\frac{x^2}{2})+x-\frac{x^3}{6}}{\arctan(x^2)-x\sin(x)} = \frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{\frac{x^4}{6}+o(x^4)} = \frac{3}{4}+o(1) \xrightarrow{x\to 0} \frac{3}{4}$$

► *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(x\sqrt{2}-x^2)} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)}{(x^3\ln(x)+4x^3)(xe^x - \sin(x))}$$

Svolgimento

Si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per calcolare il limite possiamo approssimare il numeratore con il polinomio di Taylor in $x_0 = 0$. Il primo ordine non banale del polinomio di Taylor è di ordine 4. Infatti

$$\begin{aligned}
e^{(x\sqrt{2}-x^2)} &= 1 + (x\sqrt{2}-x^2) + \frac{1}{2}(x\sqrt{2}-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(x\sqrt{2}-x^2)^3 + \frac{1}{4!}(x\sqrt{2}-x^2)^4 + o((x\sqrt{2}-x^2)^4) \\
&= 1 + (x\sqrt{2}-x^2) + \frac{1}{2}(x\sqrt{2}-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(x\sqrt{2}-x^2)^3 + \frac{1}{4!}(x\sqrt{2}-x^2)^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x\sqrt{2} - x^2 + \frac{1}{2}(2x^2 - 2\sqrt{2}x^3 + x^4) + \frac{1}{6}(2^{3/2}x^3 - 6x^4) + \frac{1}{24}4x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x\sqrt{2} - \sqrt{2}x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{\sqrt{2}x^3}{3} - x^4 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\
&= 1 + x\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Invece si osservi che

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^5)\right) = \sqrt{2}\,x - \frac{2\sqrt{2}\,x^3}{3} + o(x^5)$$

Quindi

$$\boxed{e^{(x\sqrt{2}-x^2)} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x) = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)}$$

Per quanto riguarda il denominatore, il fattore in cui compare l'esponenziale ed il seno si può approssimare con Taylor:

$$xe^x - \sin(x)) = x(1+x+x^2/2+o(x^2)) - x + x^3/6 + o(x^3) = x^2 + x^3/2 + o(x^3) - x^3/6 + o(x^3) = x^2 + o(x^2)$$

L'latro fattore non si può approssimare con Taylor (il log non si può approssimare in 0) si osservi però, dat che $x^3\ln(x)$ va a zero più lentamente di x^3, che

$$x^3\ln(x) + 4x^3 = x^3\ln(x)(1+o(1))$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(x\sqrt{2}-x^2)} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)}{(x^3\ln(x)+4x^3)(xe^x - \sin(x))} &= \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^3\ln(x)(1+o(1))(x^2+o(x^2))} = -\frac{1}{3}\frac{x^4}{x^5\ln(x)}(1+o(1)) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{x\ln(x)}(1+o(1)) \to +\infty
\end{aligned}$$

dato che $\frac{1}{x\ln(x)} \to -\infty$ per $x \to 0^+$.

Note sul polinomio di Taylor

Theorem 0.1 (Resto di Peano)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ funzione derivabile n-volte nell'intervallo I e sia $x_0 \in I$. Esiste un unico polinomio $\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)$ di grado minore o uguale ad n che verifica le seguente relazione*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \,.$$

In particolare si ha che

$$\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$$

Proof. Per dimostrare il teorema è utile osservare che vale la segunte relazione

$$\boxed{\frac{d^m}{dx^m}\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) = \mathrm{T}[f^{(m)}]^{n-m}_{x_0}(x) \;\; , \qquad 0 \le m \le n,}$$

ossia la derivata di ordine m del polinomio di Taylor di f è uguale al polinomio di Taylor di ordine $(n-m)$ della derivata di ordine m della funzione. Infatti

$$\frac{d}{dx}\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(x-x_0)^{k-1}$$

e reiterando la derivazione fino all'rdine m si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) &= \sum_{k=m}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)\cdots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m} \\
&= \sum_{k=m}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m} \overset{(t=k-m)}{=} \sum_{t=0}^{n-m} \frac{f^{(t+m)}(x_0)}{t!}(x-x_0)^t \\
&= \mathrm{T}[f^{(m)}]^{n-m}_{x_0}(x) \,.
\end{aligned}$$

Esistenza. Facciamo vedere che il polinomio $\mathrm{T}[f]^n_{x_0}$ verifica le proprietà scritte sopra. L'idea è di applicare $(n-1)$-volte de l'Hôpital $n-1$ volte (osservando che ad ogni passo della derivazione si rimane con una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ in quanto $\lim_{x\to x_0} \frac{d^m}{dx^m}\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) = f^{(m)}(x_0)$):

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)}{(x-x_0)^n} &\overset{d.H.}{=} \frac{f^{(1)}(x) - \mathrm{T}[f^{(1)}]^{n-1}_{x_0}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{d.H.}{=} \frac{f^{(2)}(x) - \mathrm{T}[f^{(2)}]^{n-2}_{x_0}(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \overset{d.H.}{=} \cdots \\
&\overset{d.H.\ n-1 volte}{=} \frac{f^{(n-1)}(x) - \mathrm{T}[f^{(n-1)}]^{1}_{x_0}(x)}{n(n-1)\cdots(n-n+2)\,(x-x_0)} \\
&= \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right) \overset{x\to x_0}{\to} 0 \,,
\end{aligned}$$

in quanto f è derivabile n-volte e $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = f^{(n)}(x_0)$. Quindi per de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \, .$$

Unicità. Se P è un polinomio di grado n che verifica la relazione di sopra si ha

$$\frac{P(x)-\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{P(x)-f(x)}{(x-x_0)^n} + \frac{f(x)-\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)}{(x-x_0)^n} \overset{x\to x_0}{\to} 0$$

e questo è possibile se, e solo se, $P = \mathrm{T}[f]^n_{x_0}$. □

Dal teorema di Peano segue la formula di *approssimazione di Taylor con resto in forma di Peano*:

$$\boxed{f(x) = \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \ , \ \ x \to x_0 \, .}$$

Il *resto* è la differenza trà la funzione ed il polinomio di Taylor, ossia $o((x-x_0)^n)$.

Proprietà del polinomio di Taylor

Vediamo ora alcune proprietà del polinomio di Taylor che si utilizzano per il calcolo del polinomio.

Lemma 0.2. *Sia f una funzione derivabile n-volte in un intervallo I ed $x_0 \in I$. Valgono le seguenti propriet:*

1. Il polinomio di Taylor della derivata*:*

$$\mathrm{T}\left[\frac{d}{dx}f\right]^{n-1}_{x_0} = \frac{\mathrm{dT}[f]^n_{x_0}}{\mathrm{d}x} \, .$$

2. Il polinomio di Taylor della primitiva*:*

$$\mathrm{T}\left[\int_{x_0}^t f\right]^{n+1}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(t)\, dt$$

3. Linearità*: se g è derivabile n-volte in $[a,b]$ allora*

$$\mathrm{T}[\alpha f + \beta g]^n_{x_0} = \alpha \mathrm{T}[f]^n_{x_0} + \beta \mathrm{T}[g]^n_{x_0} \ , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, .$$

4. *se g è una funzione tale che*

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = x_0 \ , \qquad y_0 \in \mathbb{R}_*$$

allora per $y \to y_0$ si ha

$$(f\circ g)(y) = (\mathrm{T}[f]^n_{x_0} \circ g)(y) + o((g(y)-x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(g(y)-x_0)^k + o((g(y)-x_0)^n)$$

Proof. La prima relazione è stata già provata nella dimostrazione del teorema. La linearità segue immediadamente dalla formula del polinomio di Taylor e dalla linearità della derivata. La formula della primitiva segue osservando che tutte e due le funzioni sono primitive di $T[f]^n_{x_0}$ e che tutte e due sono uguali a 0 in x_0. La quarta relazione segue osservando che posto

$$h(x) := \frac{f(x) - \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)}{(x-x_0)^n} \ , \ x \neq x_0 \ , \ h(x_0) = 0 \ ,$$

per il teorema di Peano la funzione h è continua in x_0, vale la relazione

$$\frac{(f \circ g)(y) - (\mathrm{T}[f]^n_{x_0} \circ g)(y)}{(g(y) - x_0} = (h \circ g)(y) \ ,$$

e che per il il teorema del limite di funzioni composte $\lim_{y \to y_0}(h \circ g)(y) = 0$. Da cui segue la relazione 4. □

Ci serve ora una definizione preliminare per mostrare come calcolare il polinomio di Taylor del prodotto e della composizione di due funzioni. Sia $P(x)$ un polinomio centrato in x_0, ossia $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$, definiamo il *troncamento* all'ordine m di $P(x)$, rispetto al punto x_0, il polinomio $P(x)|_m$ che si ottiene da $P(x)$ eliminando tutte le potenze di ordine maggiore di m, ossia

$$P(x)|_m := \sum_{k=0}^m a_k(x-x_0)^k \ , \qquad m \leq n$$

Si osservi che è oppurtuno specificare il punto dove è centrato il polinomio. Si consideri infatti $P(x) = x^2 - 1$. Allora se tronchiamo $P(x)$ all'ordine 1- ripsetto ad $x_0 = 0$ si ha

$$P(x)|_1 = -1$$

Tuttavia se centriamo P in 1 si ha $P(x) = 2(x-1) + (x-1)^2$. Se tronchiamo all'ordine 1 rispetto ad $x_0 = 1$ si ottiene

$$P(x)|_1 = 2(x-1)$$

Usando questa definizione si ha

1. *(Prodotto)* Siano f, g funzioni derivabili n-volte in x_0 allora

   $$\mathrm{T}[f \cdot g]^n_{x_0} = \left(\mathrm{T}[f]^n_{x_0} \cdot \mathrm{T}[g]^n_{x_0}\right)|_n$$

   dove il troncamento si intende rispetto al punto x_0. Quindi il polinomio di Taylor di grado n del prodotto di due funzioni è pari troncamento all'rdine n del prodotto dei due polinomi di Taylor di grado n.

2. *(Composizione)* Sia g derivabile n-volte in un intorno y_0 ed f derivabile n-volte in un intorno di $g(y_0)$. Allora

   $$\mathrm{T}[f \circ g]^n_{y_0} = (\mathrm{T}[f]^n_{g(y_0)} \circ \mathrm{T}[g]^n_{y_0})|_n \ ,$$

   ossia il polinomio di Taylor di grado n di una composizione è pari al troncamento all'ordine n della composizione dei due polinomi di Taylor.

Esempi di polinomi di Taylor derivanti dalla somma di una progressione geometrica

A partire dalla somma di una progressione geometrica

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

si ha

$$\sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{-x^{n+1}}{1-x} = o(x^n) \ \ , \ \ x \to 0$$

Quindi per l'unicità del polinomio di Taylor si ha

$$\mathrm{T}\left[\frac{1}{1-x}\right]_0^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Da questo seguono anche le seguenti relazioni

$$\mathrm{T}\left[\frac{1}{1+x}\right]_0^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \ \ , \ \ \mathrm{T}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]_0^{2n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$$

che si ottengono dalla precedente equazione sostutuendo $x \to -x$ in un caso e $x \to -x^2$ nell'altro. Ora osservando che $\arctan(x)$ è la primitiva di $1/(1+x^2)$ e che $\ln(x)$ è la primitiva di $1/(1+x)$ dal lemma che lega il polinomio di Taylor con quello delle sue primitive si ha

$$\mathrm{T}[\arctan]_0^{2n+1}(x) = \int_0^x \mathrm{T}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]_0^{2n}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

e che

$$\mathrm{T}[\ln(1+x)]_0^{n+1}(x) = \int_0^x \mathrm{T}\left[\frac{1}{1+x}\right]_0^{2n}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^{k}\,dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

in altre parole

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

e

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

Il polinomio di Taylor con resto in forma di Lagrange

Veniamo ora ad un risultato che da una informazione ulteriore sull'apporssimazione di una funzione con il polinomio di Taylor.

Lemma 0.3 (Resto di Lagrange)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $(n+1)$-volte nell'intervallo I e sia $x_0 \in I$. Allora, per ogni $x \in I$ ed $x \neq x_0$ esiste un punto $z \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ tale che*

$$f(x) = \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - x_0)^{n+1} .$$

La funzione $\frac{f^{(n+1}(z)}{n!}(x - x_0)^{n+1}$ *è detta* resto di Lagrange.

Proof. Supponiamo $x_0 < x$. Poniamo

$$R(t) := f(t) - \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(t) \quad , \quad t \in [x_0, x] \quad ; \quad D(t) := (t - x_0)^{n+1} \quad , \quad t \in [x_0, x]$$

e si consideri il rapporto

$$\frac{f(t) - \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(t)}{(t - x_0)^{n+1}} = \frac{R(t)}{D(t)} \quad , \quad t \in [x_0, x] .$$

Sia il numeratore che il denominatore sono funzioni derivabili in $[x_0, x]$ e la derivata prima del denominatore non si annulla mai in (x_0, x). Sono quindi verificate le ipotesi del poter applicare il teorema di Cauchy: quindi (osservando che $D(x_0) = 0 = R(x_0)$) esiste $x_1 \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{R^{(1)}(x_1)}{D^{(1)}(x_1)} = \frac{f^{(1)}(x_1) - \mathrm{T}[f^{(1)}]^{n-1}_{x_0}(x_1)}{(n+1)(x_1 - x_0)^n}$$

Tuttavia la funzione $\frac{R^{(1)}(t)}{D^{(1)}(t)}$ per $t \in [x_0, x_1]$ verifica ancora le ipotesi del teorema di Cauchy per cui esiste $x_2 \in (x_0, x_1)$ tale che

$$\frac{R^{(1)}(x_1)}{D^{(1)}(x_1)} = \frac{R^{(2)}(x_2)}{D^{(2)}(x_2)} = \frac{f^{(2)}(x_2) - \mathrm{T}[f^{(2)}]^{n-2}_{x_0}(x_2)}{(n+1)n(x_2 - x_0)^{n-2}} ,$$

che insieme alla relazione precedente implicano

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{R^{(2)}(x_2)}{D^{(2)}(x_2)} = \frac{f^{(2)}(x_2) - \mathrm{T}[f^{(2)}]^{n-2}_{x_0}(x_2)}{(n+1)n(x_2 - x_0)^{n-2}}$$

L'idea ora è che il ragionamento si può reiterare $n+1$ volte. Si ottiene in definitiva una sequenza di numeri

$$x_0 < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x$$

tali che

$$\frac{f(x) - \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R(x)}{D(x)} = \frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{D^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!} ,$$

in quanto $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) = 0$ e $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x - x_0)^{n+1} = (n+1)!$. Quindi

$$f(x) - \mathrm{T}[f]^n_{x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad , \quad x_{n+1} \in (x_0, x)$$

da cui, ponendo $z = x_{n+1}$, segue la tesi. □

Applicazioni. La formula del resto di Lagrange si presta a diverse applicazioni; in particolare nel caso in cui sia semplice calcolare le derivate di ordine n della funzione. Vediamo una semplice applicazione.

1. *Approssimare la funzione e^x nell'intervallo* $[-1,1]$ *con un polinomio a meno di 3 cifre decimali, ossia vogliamo trovare un polinomio $P(x)$ tale che*

$$|e^x - P(x)| \leq 10^{-3} \quad , \quad x \in [-1,1] \; .$$

   Consideriamo il polinomio di Taylor $\mathrm{T}[e]_0^n(x)$ della funzione esponenziale centrato in $x_0 = 0$. In base alla formula del resto di Lagrange si ha che per $x \in [-1,1]$ esiste $z \in (-1,1)$ tale che

$$e^x - \mathrm{T}[e]_0^n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \Rightarrow \left| e^x - \mathrm{T}[e]_0^n(x) \right| \leq \frac{e^z}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

   Tuttavia dato che $z \in (-1,1)$ e che $x \in [-1,1]$ si ha che

$$e^z \leq e \;\; , \;\; |x|^{n+1} \leq 1 \;\; x \in [-1,1].$$

   Da cui

$$\left| e^x - \mathrm{T}[e]_0^n(x) \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \; .$$

   Quindi osservado che $7! > 1000$ un polinomio di grado minimo che soddisfa la relazione richiesta è il polinomio di Taylor di grado 6:

$$\left| e^x - \mathrm{T}[e]_0^6(x) \right| \leq 10^{-3} \quad x \in [-1,1] \; ,$$

   dove $\mathrm{T}[e]_0^6(x) = \sum_{k=0}^{6} \frac{x^k}{k!}$. Si osservi, in particolare, che ponendo nella precedente relazione $x = 1$ si ottiene che il numero razionale $\mathrm{T}[e]_0^6(1) = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}$ approssima il numero di Nepero a meno di tre cifre decimali:

$$\left| e - \mathrm{T}[e]_0^6(1) \right| = \left| e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} \right| \leq 10^{-3} \; .$$