6 Asintoti, studio di funzioni e invertibilità

1. Studiare il dominio di definizione e gli asintoti delle seguenti funzioni :

   (a) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-1}$; $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$; $f(x) = \frac{x^2+3|x|+2}{x-1}$.

   (b) $f(x) = \frac{x^3-2x+2}{x^2-3x+2}$; $\frac{x^3-2x+2}{x+2}$.

   (c) $f(x) = x + \ln(x)$; $f(x) = x \arctan(x)$; $f(x) = \frac{x}{\arctan(x)}$.

   (d) $f(x) = x\, e^{\frac{-1}{x}}$; $f(x) = xe^{\frac{x+1}{1-x}}$; $f(x) = xe^{\frac{x^2+1}{1-x}}$.

   (e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$; $f(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| - 8}$.

   (f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 8}$; $\sqrt[3]{x^3 - 2x - 8}$.

   (g) $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+8}{x+9}\right)$; $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+8}{x^2+9}\right)$.

   (h) $f(x) = x + x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$.

   (i) $f(x) = \ln\left(e^{\left(1+2x-\frac{1}{x+1}\right)} - 1\right)$

   (j) $f(x) = x\,|\ln(1 - e^x)|$; $f(x) = |x + 8|e^{\frac{x+7}{x-1}}$.

   (k) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ per $\alpha \in (0, +\infty)$

2. Dopo aver calcolato l'equazione dell'asintoto obliquo a $\pm\infty$ delle seguenti funzioni, stabilire se la funzione maggiora o minora definitivamente a $\pm\infty$ il corrispondente asintoto:

   (a) $f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$.

   (b) $f(x) = \frac{x^3-x+2}{x^2-3}$

   (c) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 6}$

   (d) $f(x) = x\, e^{\frac{-1}{x}}$

3. Studiare il grafico delle seguenti funzioni (dominio ed asintoti; continuità e derivabilità; intervalli di monotonia; max/min locali e assoluti; immagine; grafico della funzione)

   (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

   (b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$

   (c) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1} + \ln(x - 1)$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ù

   (e) $f(x) = \sqrt[2]{x^2 - 5x - 36}$

   (f) $f(x) = \sqrt[2]{|x^2 - 5x - 36|}$

   (g) $f(x) = \frac{x^2-2|x|+1}{x}$

   (h) $f(x) = \frac{x|x|-2x-8}{x+6}$

   (i) $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2+4}$

   (j) $f(x) = x\, e^{\arctan(x)}$, $f(x) = x^2\, e^{\arctan(x)}$

   (k) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

(l) $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)}$

(m) $f(x) = x(3 - (\ln(x))^2$

(n) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \arctan(x) + x$

(o) $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

(p) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+5}\, e^{\frac{1}{x}}$

(q) $f(x) = x^{\ln(x)}$

(r) $f(x) = \arctan(|x^2 - 1|)$

(s) $f(x) = x\, e^{1/\ln(x)}$

4. Studiare le funzioni elencate:dominio di definizione; asintoti; crescenza e decrescenza; punti di non derivabilità, max/min locali; convessità.

(a) $f(x) = x^2 \ln(x) \quad ; \quad f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$

(b) $f(x) = (x^2 - 4x + 1)^{x+2}$

(c) $f(x) = xe^{-x} \ln(x)$

(d) $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{x})$

(e) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$

(f) $f(x) = e^x - x^2 \quad ; \quad f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 \quad ; \quad f(x) = e^x - 3x^2$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|(x+1)x^2}}{x}$

(h) $f(x) = e^x - \alpha x^2 \quad , \quad \alpha > 0$

5. Studiare gli insiemi in cui sono invertibili le seguenti funzioni e calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto di coordinate $y_0 = f(x_0)$ indicato nell'esercizio.

(a) $f(x) = x + \arctan(x) \quad , \quad x_0 = 1$

(b) $f(x) = x \arctan(x) \quad , \quad x_0 = -1$

(c) $f(x) = \ln(x) + \frac{x-2}{x+6} \quad , \quad x_0 = 2$

(d) $f(x) = e^x + \arctan(x) \quad , \quad x_0 = 0$

6.1 Esempi

1) Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}\ .$$

a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui.
b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
c) Tracciare il grafico della funzione.
N.B. non si richiede lo studio della derivata seconda della funzione.

Svolgimento.

a) La funzione è definita in $(0, +\infty)$ in quanto $(x+2)^2 \geq 0$ e $|\ln(x)| \geq$. Quindi l'unica condizione che definisce il dominio della funzione $f(x)$ è il dominio del logaritmo. Per quanto riguarda gli asintoti

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|} = \sqrt{4 + |\ln(x)| + o(1)} = +\infty\ .$$

Quindi in 0 c'è un asintoto verticale. Mentre per $x \to +\infty$ si osservi che

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|} &= |x+2| \cdot \sqrt{1 + \frac{|\ln(x)|}{(x+2)^2}} \\
&= (x+2) \cdot \left(1 + \frac{|\ln(x)|}{2(x+2)^2} + o\left(\frac{|\ln(x)|}{(x+2)^2}\right)\right) \\
&= (x+2) + \frac{|\ln(x)|}{2(x+2)} + o\left(\frac{|\ln(x)|}{(x+2)}\right) \\
&= x + 2 + o(1)
\end{aligned}$$

Quindi la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

b) Per quanto riguarda la derivabilità si osservi che nella definizione di $f(x)$ compaiono sia la funzione $|x|$ che la funzione $\sqrt{x}$, che sono funzioni derivabili nel loro dominio tranne che nel punto $x = 0$. Si osservi che l'argomento del modulo si annula nel punto $x = 1$, mentre l'argomento della radice non si annulla mai. Di conseguenza per tutti gli $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ la funzione $f(x)$ risulta derivabile ed in tale regione la derivata può essere calcolata usando le regole di derivazione. Di conseguenza studieremo la monotonia di $f(x)$ per tutti gli $x \neq 1$ studiando il segno della derivata di $f(x)$. Mentre di seguito studieremo la derivabilità di $f(x)$ in $x = 1$.

$\boxed{\mathbf{x \neq 1}}$ In questa regione

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x + 4 + sgn(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} = \frac{2x^2 + 4x + sgn(\ln(x))}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}} \\
&= \begin{cases} \frac{2x^2+4x+1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}}\ , & x > 1\ ; \\ \frac{2x^2+4x-1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{(x+2)^2 + |\ln(x)|}}\ , & 0 < x < 1\ ; \end{cases}
\end{aligned}$$

dove $sgn(\ln(x))$ indica la funzione segno di $\ln(x)$:

$$sgn(\ln(x)) = \begin{cases} 1\ , & \ln(x) > 0 \iff x > 1\ ; \\ -1\ , & \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1\ . \end{cases}$$

In entranbi i casi il denominatore è sempre positivo. Quindi lo studio del segno della derivata prima dipende esclusivamente dal numeratore. In particolare

x > 1 Il segno di f' è quello $2x^2+4x+1$. Le radici dell'equazione $2x^2+4x+1=0$, sono $x_\pm = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$. Sono tutte e due negative. Quindi $f'(x)>0$ per $x>1$.

x < 1 Il segno di f' è quello $2x^2+4x-1$. Le radici dell'equazione $2x^2+4x-1=0$, sono $x_\pm = \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$. In questo caso una radice è negativa. Per l'altra radice si ha

$$0 < \frac{-2+\sqrt{6}}{2} < 1$$

Quindi $f'(x)<0$ per $0<x<\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$ e $f'(x)>0$ per $\frac{-2+\sqrt{6}}{2}<x<1$.

Riassumendo

$$f'(x) \text{ è } \begin{cases} <0\,, & 0<x<\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\,; \\ =0\,, & x=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\,; \\ >0\,, & \frac{-2+\sqrt{6}}{2}<x<1\,; \\ >0\,, & x>1 \end{cases} \implies f(x) \text{ è } \begin{cases} \text{decrescente} & 0<x<\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\,; \\ \text{crescente} & \frac{-2+\sqrt{6}}{2}<x<1\,; \\ \text{crescente} & x>1 \end{cases}$$

In particolare $x=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$ è un *minimo relativo* (assoluto, in realtà) di $f(x)$.

$\boxed{\mathbf{x<1}}$ Rimane da discutere la derivabilità della funzione in $x=1$. Dal momento che la funzione è continua in 1 e le derivate esistono in un'intorno di 1 possiamo utilizzare il corollario del teorema di Lagrange il quale afferma che se il limite destro/sinistro delle derivate esiste finito o infinito allora coincide con la derivata destra/sinistra della funzione. Osservando che

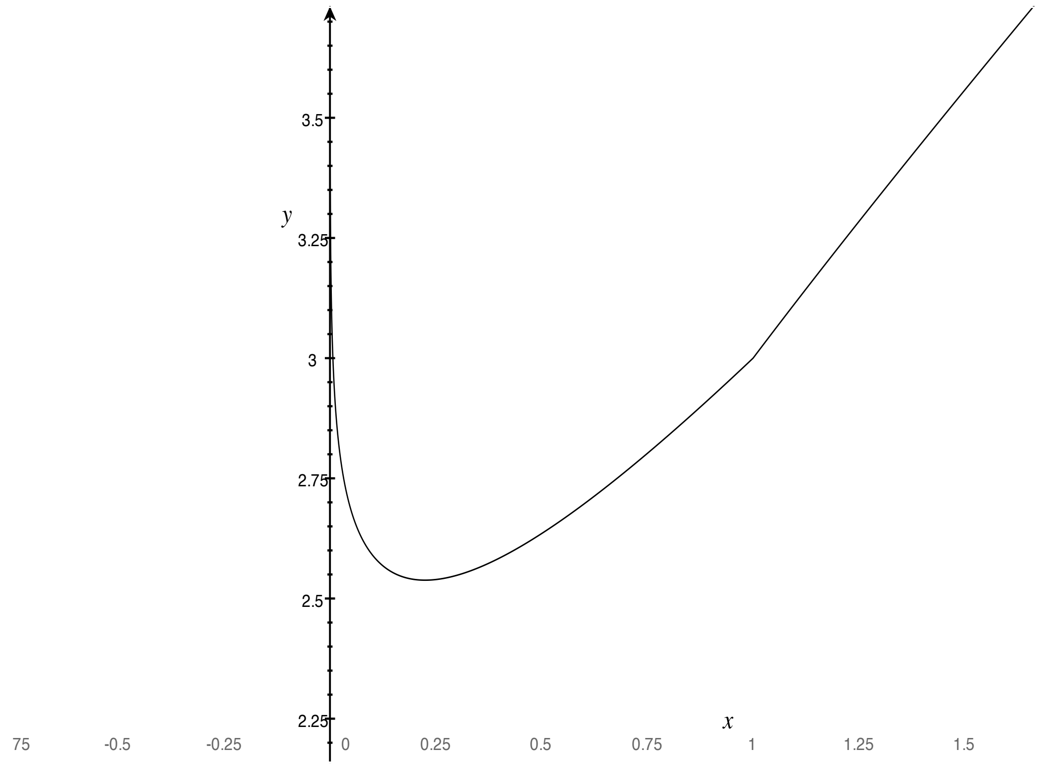
$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2+4x-1}{2\cdot x\cdot\sqrt{(x+2)^2+|\ln(x)|}} = \frac{5}{6} = f'_-(1)\,,$$

e che

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{2x^2+4x+1}{2\cdot x\cdot\sqrt{(x+2)^2+|\ln(x)|}} = \frac{7}{6} = f'_+(1)\,,$$

si ha che $f'_+(1)\neq f'_-(1)$. Quindi la funzione non è derivabile in 1.

c) Per quanto riguarda il grafico della funzione si ha



2) Data la funzione

$$f(x) = (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x}$$

a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui/orizzontali.
b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

a) Il dominio della funzione è dato dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \ , \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \ , \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

Quindi gli asintoti vanno studiati a $\pm\infty$ e in 0 punto di frontiera del dominio. Si osservi che per $x \to 0^-$ si ha che $-1/x \to \infty$, quindi per il limite notevole potenze/esponenziali si ha che

$$f(x) = (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x} = -x e^{-1/x}(1 + o(1)) \overset{x \to 0^-}{\to} +\infty$$

Quindi 0^- è un asintoto verticale. Inoltre per $x \to \pm\infty$ si ha

$$f(x) = (x^2 - x)^{1/2} e^{-1/x} = |x|(1 - 1/x)^{1/2} e^{-1/x} = |x|(1 - 1/2x + o(1/x))(1 - 1/x + o(1/x))$$
$$= |x|(1 - \frac{3}{2x} + o(1/x))$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2} + x + o(1)\ , & x \to +\infty\ , \\ \frac{3}{2} - x + o(1)\ , & x \to -\infty\ . \end{cases}$$

Quindi a $+\infty$ l'asintoto obliquo a $+\infty$ ha equazione $y = -\frac{3}{2} + x$. L'asintoto a $-\infty$ ha equazione $y = \frac{3}{2} - x$.

b) La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ perche composizione somma e prodotto di funzioni derivabili in tale insieme. In particolare

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-1/x}\frac{2x-1}{2(x^2-x)^{1/2}} + e^{-1/x}\frac{1}{x^2}(x^2-x)^{1/2} = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}\,(2x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x) \\ &= \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}\,(2x^3 + x^2 - 2x) = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}\,x\,(2x^2 + x - 2). \end{aligned}$$

Il segno della derivata prima dipende dal prodotto di x per il polinomio di secondo grado $(2x^2 + x - 2)$,le cui radici sono $x_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$ e da x. Si osservi che $0 < \frac{-1+\sqrt{17}}{4} < 1$ quindi tale radice cade fuori dal dominio di definizione. Quindi il segno di f' ha

$$f'(x) = \begin{cases} \quad - & \quad 0 & \quad + & \quad + \\ \\ (-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}) & \frac{-1-\sqrt{17}}{4} & (\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}, 0) & (1, +\infty) \end{cases}$$

Di conseguenza per quanto riguarda la monotonia della funzione si ha

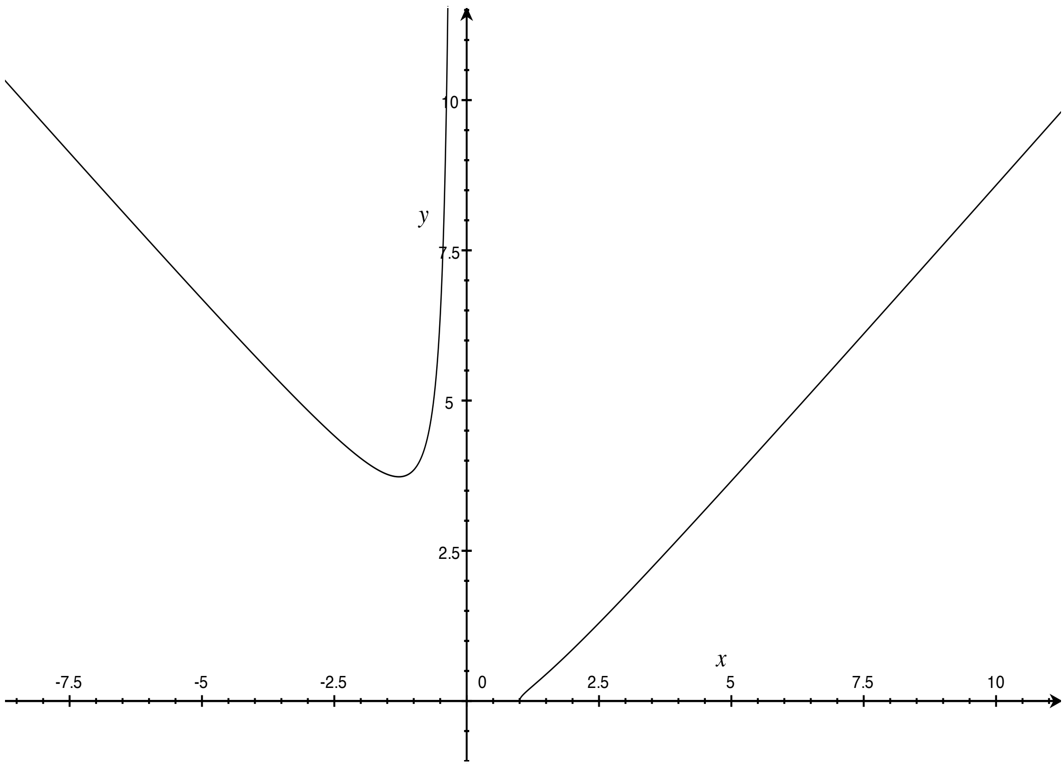
$$f(x) = \begin{cases} \quad \searrow & \quad \nearrow & \quad \nearrow \\ \\ (-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}) & (\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}, 0) & (1, +\infty) \end{cases}$$

Quindi $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ è un minimo relativo. Il grafico si evince dalla monotonia dagli asintoti e dal fatto che $f(x)$ è sempre ≥ 0:

Per quanto riguarda la derivabilità in 1^+ si osservi che la funzione è continua in tal punto. Inoltre

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{2x^2(x^2-x)^{1/2}}\,x\,(2x^2 + x - 2) = \frac{e^{-1}}{2((x-1))^{1/2}}(1 + o(1)) \overset{x\to 1^+}{\to} +\infty$$

quindi per il corollario del teorema di Lagrange la derivata destra in 1 non esiste. Più precisamente 1 è un punto a tangente verticale.



3) Sia data la funzione

$$f(x) = x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui.
b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento
a) Il dominio della funzione è individuato dalla disequazione

$$\frac{4x}{x-2} \geq 0 \quad , \quad x \neq 2$$

Da cui si evince che il dominio è l'insieme $D_f = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$. Quindi dovremo studiare l'esistenza di asintoti in 2^+ e $\pm\infty$. Studiamo prima l'esistenza di un asintoto verticale in 2^+: si osservi che per $x \to 2^+$ si ha

$$f(x) = x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{8}}{(x-2)^{1/2}}(1 + o(1)) \to +\infty$$

Quindi $f(x)$ ha un asintoto verticale in 2^+. Per quanto riguarda $\pm\infty$ si osservi che per $x \to \pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2x\left(1+\frac{2}{x-2}\right)^{1/2} = 2x\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{2}{x-2}+o(x^{-1})\right) \\ &= 2\,x+2\,\frac{x}{x-2}+o(x^{-1}) = 2\,x+2+\frac{4}{x-2}+o(x^{-1})) \\ &= 2\,x+2+o(1)\ . \end{aligned}$$

Quindi a + e - ∞ sono presenti due asintoti obliqui aventi la stessa equazione

$$\boxed{y = 2\,x+2}$$

b) La funzione è derivabile in $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$. Studiamo il segno della derivata in tale insieme per capire la monotonia. Dopodichè studieremo la derivabilità di f in 0.

$\boxed{x \in (-\infty,0)\cup(2,\infty)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{8}{(x-2)^2} = \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} - x\left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{4}{(x-2)^2} \\ &= \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4x}{x-2}-\frac{4x}{(x-2)^2}\right) = \left(\frac{4x}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{4}{(x-2)^2}\,(x^2-3x) \end{aligned}$$

Per cui il segno della derivata nella regione in esame dipende dal polinomio di secondo grado $(x^2-3x) = x(x-3)$. Di conseguenza:

$$f'(x) \text{ è } \begin{cases} \textit{crescente} & x \in (-\infty,0) \\ \textit{descrescente} & x \in (2,3) \\ 0 & x = 3 \\ \textit{crescente} & x \in (3,+\infty) \end{cases}$$

Quindi il punto $x = 3$ è un minimo relativo.

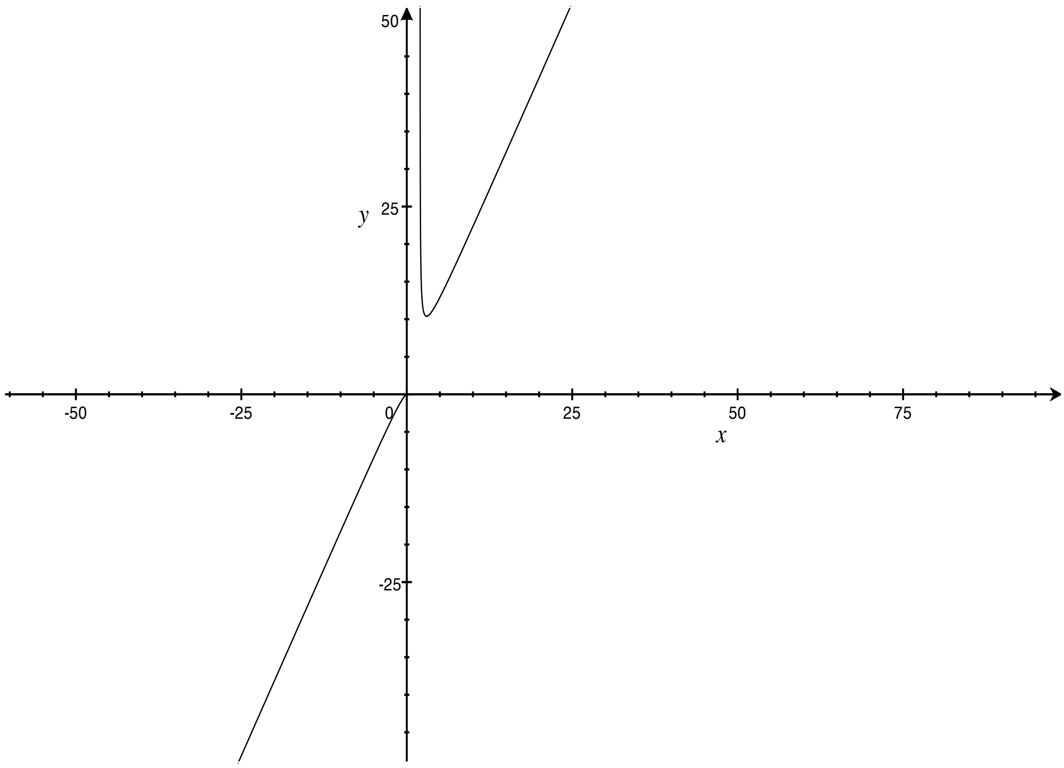
$\boxed{x = 0}$

Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si osservi che la funzione è continua in 0 perchè composizione di funzioni continue. Si osservi inoltre che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0\ .$$

Per il corollario del teorema di Lagrange si ha che f è derivabile in 0 da sinistra con derivata $f'_-(0) = 0$.

c) Usando i risultati di sopra si traccia il seguente grafico:



50
25
y
-25
-50
-25
0
25
50
75
x

4) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})}$$

a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui/orizzontali.
b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

a) Il dominio della funzione è dato dal sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x^2+1} > 0 \ , \\ \frac{x+1}{x^2+1} \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \ , \\ \frac{x+1-x^2-1}{x^2+1} \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \ , \\ \frac{x(1-x)}{x^2+1} \neq 0 \end{cases} \iff x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Quindi gli asintoti vanno studiati a $+\infty$ e in ± 1 e 0 punti di frontiera del dominio:

$$x \to -1^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(0^+/2)} = 0^- \ ,$$

$$x \to +\infty \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(0^+)} = 0^-$$

Nei punti 0 e 1 l'argomento del logaritmo tende a 1. Tuttavia per capire se tende a 1 per eccesso o per difetto conviene dove l'argomento del llogaritmo è minore o maggiore di 1:

$$\frac{x+1}{x^2+1} > 1 \iff \frac{x+1-x^2-1}{x^2+1} > 0 \iff x(1-x) > 0$$

quindi l'argomento

$$\frac{x+1}{x^2+1} > 1 \ per \ x \in (0,1) \quad ; \quad \frac{x+1}{x^2+1} < 1 \ per \ x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$$

Quindi per

$$x \to 0^- \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$x \to 0^+ \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \to 1^- \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x \to 1^+ \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{x^2+1})} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

b) La funzione è derivabile nel suo dominio perchè composizione somma e prodotto di funzioni derivabili in tale insieme. In particolare

$$f'(x) = -\ln^{-2}(\frac{x+1}{x^2+1}) \cdot \frac{x^2+1}{x+1} \frac{1}{(x^2+1)^2}(x^2+1-2x(x+1))$$

Il segno della derivata prima dipende solo dal segno del polinomio

$$-(x^2 + 1 - 2x(x+1)) = x^2 + 2x - 1$$

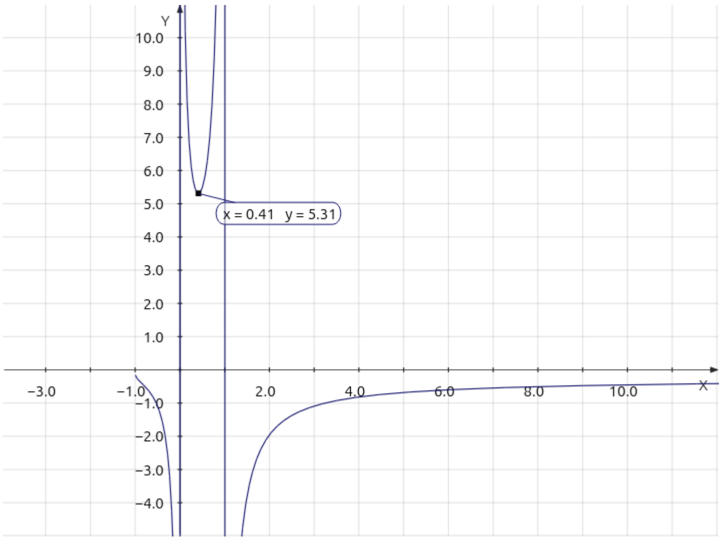
in quanto tutti gli altri fattori sono ≥ 0. In particolare $\frac{x^2+1}{x+1}$ è l'inverso dell'argomento del logaritmo, quindi è sempre > 0 nel dominio di definizione. Quindi

$$x^2 + 2x - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty) \quad \Rightarrow$$

e

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & x \in (-1, 0) \cup (0, -1+\sqrt{2}) \\ -1+\sqrt{2} & \textit{min relativo} \\ > 0 & x \in (-1+\sqrt{2}, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Un grafico qualitativo della funzione è



5) Data la funzione

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$$

a) Calcolare il dominio di definizione ed eventuali asintoti verticali/obliqui/orizzontali.
b) Studiare la derivabilità della funzione (specificando eventuali punti di non derivabilità) e trovare eventuali punti di massimo/minimi relativi della funzione.
c) Tracciare il grafico della funzione.

Svolgimento

a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x) \to +\infty$ per $x \to \infty$ e non ci sono asintoti obligui in quanto si tratta di un infinito di ordine 4. Per studiare la monotonia cal coliamo la derivata prima

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x - 1 \ .$$

Dato che si tratta di un polinomio di grado 3 on riusciamo a studiare il segno di f' risolvendo la disuguaglianza $f'(x) > 0$ (a meno che non conosciamo uno zero di $f'(x)$). Un modo per capire la monotonia di f ed in particolare l'esistena di estremi relativi consiste nello studiare il grafico di f'. Questo permette di capire il segno di f' e quindi la monotonia di f.

Quindi si osservi che

$$x \to +\infty \ \Rightarrow \ f'(x) \to +\infty \ , \quad ; \quad x \to -\infty \ \Rightarrow \ f'(x) \to -\infty$$

Per quanto riguarda la monotonia si ha

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3)$$

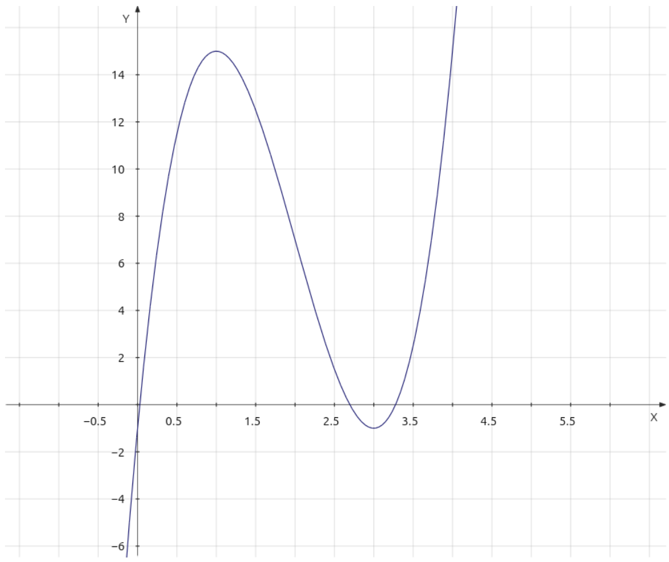
e le radici del polinomio di secondo grado sono $x_\pm = 2 \pm \sqrt{4-3} = 1, 3$. Quindi

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ < 0 & x \in (1, 3) \end{cases}$$

Abbiamo due informazioni: 1) $f(x)$ è convessa nelle regioni $(-\infty, 1), (3, +\infty)$ e concava in $(1, 3)$; f' ha un massimo relativo in 1 ed un minimo relativo in 3. Ora si osservi che

$$f'(1) = 15 > 0 \ \ , \ \ f'(3) = -1 < 0$$

Osservando che:f' è crescente in $(-\infty, 1)$ e che tende a $-\infty$ a $-\infty$ e che $f(1) > 0$ si deduce che f' ha uno zero $\bar{x}_1$ in $(-\infty, 1)$. In particolare, dato che $f'(0) = -1$ si ha che $\bar{x}_1 \in (0, 1)$. In maniera analoga dato che $f(3) < 0$ e che 3 è un minimo, f' ha uno zero $\bar{x}_2 \in (1, 3)$. Infine avrà un altro zero $\bar{x}_3$ in $(3, +\infty)$. Il grafico di f' è il seguente



Quindi in base al segno della derivata prima possiamo dedurre che la funzione f avrà un massimo relativo in $\bar{x}_1$, un minimo relativo in $\bar{x}_2$ ed infine un massimo relativo in $\bar{x}_3$. Inoltre come già osservato è convessa nelle regioni $(-\infty, 1), (3, +\infty)$ e concava in $(1, 3)$. Il grafico di f è il seguente