5 Continuità e derivabilità

1. Studiare la continuità in tutto il dominio di definizione delle funzioni elencate
   (a) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$
   (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)\left(x^2-(\pi/2)^2\right)}{x}, & x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2), \\ -(\pi/2)^2 & x = 0, \\ -2 & x = \pi/2, \\ 2 & x = -\pi/2. \end{cases}$
   (d) $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$

2. Studiare al variare del parametro la continuità delle funzioni elencate
   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+2x^\alpha}-\cos(x)}{x+x^\alpha}, & x > 0, \\ 2/3 & x = 0, \end{cases}$ per $\alpha > 0$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\left(1+x^{(\alpha-1)}\right)}{\alpha x}, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ \frac{\arctan(1/x)}{-\pi}, & x < 0. \end{cases}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le funzioni elencate si possono estendere per continuità
   (a) $f(x) = \frac{\ln\left(1+x^{(\alpha-1)}\right)}{\alpha x}, x > 0.$
   (b) $f(x) = \frac{\sin(\alpha x^\alpha)+x}{x^2}, x > 0.$
   (c) $f(x) = \frac{(\ln(1+x))^\alpha \arctan\left(\alpha x^{-2\alpha}\right)}{x^2}, x > 0$

4. Studiare la continuità e la derivabilità delle funzioni elencate in tutto il loro dominio di definizione e calcolare la derivata nei punti in cui la funzione risulta derivabile.
   (a) $f(x) = \sin(|x|)$, $f(x) = x\sin(|x|)$
   (b) $f(x) = \sin(x-1)\sqrt[3]{x^2-1}$, $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x)}$
   (c) $f(x) = \sin(|x-1|) - |x-1|$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$
   (d) $f(x) = \sqrt[3]{1-\cos(x)}$, $x \in [-\pi, \pi]$
   (e) $f(x) = (1-\cos(x))^{3/5}$, $x \in [-\pi, \pi]$

(f) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(|x|)\right)^{3/5} \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$

(g) $f(x) = \left|\sin\left(x^2-4\right)\right| \ln(3-x) \quad , \quad f(x)| = \sin(|x|-2)| \ln(3-x)$

(i) $f_1(x) = \begin{cases} \sin\left(x^{-1}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(j) $f_2(x) = \begin{cases} x\sin\left(x^{-1}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(k) $f_3(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(x^{-1}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(l) $f_4(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(x^{-1}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(m) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(x^{-1}\right) + \alpha x & x > 0 \\ xe^{-x} & x \leq 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(n) $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

(o) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

5. Trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che le seguenti funzioni risultino derivabili

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{e^{x-1}+1} & x > 1 \\ \alpha x + \beta x^2 & x \leq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\alpha\left(x^2-1\right)\right) & x > 1 \\ \beta + \ln\left(1+x^2\right) & x \leq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\cosh(x)} & x \geq 0 \\ \alpha + \beta x & x < 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & x \geq \alpha \\ (x-\alpha)^2 + \beta x(x-\alpha) & x < \alpha \end{cases}$

6. Dimostrare usando i teoremi sulla derivazione le seguenti relazioni

(a) $\arctan(x) = \begin{cases} \pi/2 - \arctan(1/x), & x > 0 \\ -\pi/2 - \arctan(1/x), & x < 0 \end{cases}$

(b) $\arcsin(x) = \begin{cases} \pi/2 - \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right), & x \in (0,1) \\ -\pi/2 + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right), & x \in (-1,0) \end{cases}$

(c) $\arccos(x) = \begin{cases} \pi/2 - \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right), & x \in (0,1) \\ \pi/2 + \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right), & x \in (-1,0) \end{cases}$

5.1 Esempi

• *Studiare la continuità e la derivabilità della funzione*

$$f(x) := (e^x - e)\,(\ln(x))^{1/3}, \quad x > 0$$

Svolgimento. La funzione è continua in tutto il dominio di definizione, $(0,+\infty)$, in quanto prodotto e composizione di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità, l'unico problema è la presenza di una radice cubica funzione che risulta non derivabile in 0 . Quindi l'unico punto "critico" per quanto riguarda la derivabilità è $x = 1$, in quanto l'argomento della radice, ossia $\ln(x)$ si annulla. Quindi per $x \in (0,+\infty)\backslash\{1\}$ la funzione risulta derivabile

$$f'(x) = e^x(\ln(x))^{1/3} + \frac{1}{3x\ln(x)^{2/3}}\,(e^x - e)\,, \quad x \in (0,+\infty)\backslash\{1\}$$

Per vedere se f è derivabile in $x = 1$ studiamo il limite del rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{(e^x-e)\,(\ln(x))^{1/3}}{x-1} = \frac{e\left(e^{x-1}-1\right)(\ln(1+(x-1)))^{1/3}}{x-1} \\ &= \frac{e(x-1)(1+o(1))((x-1)(1+o(1)))^{1/3}}{x-1} = e(x-1)^{1/3}(1+o(1)) \to 0\end{aligned}$$

Quindi f è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = 0$.

• *Studiare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione risulta simultaneamente continua e derivabile*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(e^x+2)^{1/2}(\cos(x)-x\ln(1+x))}{a+bx,}, & x > 0 \\ e^x - 1 & x \le 0 \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione è formata da un innesto di due funzioni. Tutte e due le funzioni sono continue e derivabili nelle regioni in cui sono definite. Quindi l'unico punto in cui bisogna verificare la continuità e derivabilità è l'origine. Si osservi che $f(0) = a$ e che, banalmente, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(a + bx) = 0$. Quindi affinchè la funzione risulti continua dobbiamo imporre che $a = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Per $x \to 0^+$si ha

$$\begin{aligned}\frac{(e^x+2)^{1/2}\,(\cos(x) - x\ln(1+x)) - 1}{e^x - 1} &= \frac{\sqrt{3}\left(-\frac{x^2}{2} - x^2 + o\left(x^2\right)\right)}{x(1+o(1))} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1+o(1)) \to 0 = a\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq 0$ la funzione è derivabile. Per determinare b in modo che f sia derivabile, imponiamo che derivata destra e sinistra siano uguali:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{bx}{x} = b = f'_-(0)$$

mentre per $x \to 0^+$, sfruttando l'approssimazione fatta prima, si ha

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(e^x+2)^{1/2}\left(\cos(x) - x\ln(1+x)\right)}{x\left(e^x-1\right)} = -\frac{3\sqrt{3}x}{2x}(1+o(1)) \to -\frac{3\sqrt{3}}{2} = f'_+(0)$$

Quindi f è derivabile in 0 se

$$b = f'_-(0) = f'_+(0) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \iff b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

In conclusionde f è derivabile in 0 se $a = 0$ e $b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

• *Studiare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione risulta simultaneamente continua e derivabile*

$$f(x) := \begin{cases} \ln\left(e^x - 1\right) x^2 & x > 0 \\ a + bx, & x \le 0 \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione è formata da un innesto di due funzioni. Tutte e due le funzioni sono continue e derivabili nelle regioni in cui sono definite. Quindi l'unico punto in cui bisogna verificare la continuità e derivabilità è l'origine. Si osservi che $f(0) = a$ e che, banalmente, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(a + bx) = 0$. Quindi affinchè la funzione risulti continua dobbiamo imporre che $a = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Per $x \to 0^+$si ha

$$\ln\left(e^x-1\right)x^2 = \ln(x+o(x))x^2 = \ln(x)x^2(1+o(1)) \to 0^- \Rightarrow a = 0$$

dove $\ln(x)x^2 \to 0^-$per il confronto potenze logaritmo. Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq 0$ la funzione è derivabile. Per determinare b in modo che f sia derivabile, imponiamo che derivata destra e sinistra siano uguali:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx}{x} = b = f'_-(0)$$

mentre per $x \to 0^+$, sfruttando l'approssimazione fatta prima, si ha

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(x)x^2(1+o(1))}{x} = \ln(x)x(1+o(1)) \to 0^- = f'_+(0)$$

Quindi f è derivabile in 0 se

$$b = f'_-(0) = f'_+(0) = 0 \iff b = 0$$

• *Studiare per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ la seguente funzione risulta simultaneamente continua, derivabile e strettamente crscente*

$$f(x) := \begin{cases} \ln(1 + 2\arctan(x)) & x > 0 \\ a + bx + cx^2, & x \le 0 \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione è formata da un innesto di due funzioni. Tutte e due le funzioni sono continue e derivabili nelle regioni in cui sono definite. Quindi l'unico punto in cui bisogna verificare la continuità e derivabilità è l'origine. Si osservi che $f(0) = a$ e che, banalmente, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(a + bx) = 0$. Quindi affinchè la funzione risulti continua dobbiamo imporre che $a = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\ln(1 + 2\arctan(x)) = \ln(1 + 2x + o(x)) = 2x(1 + o(1)) \to 0 \Rightarrow a = 0$$

Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq 0$ la funzione è derivabile. Per determinare b in modo che f sia derivabile, imponiamo che derivata destra e sinistra siano uguali:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx + cx^2}{x} = b = f'_-(0)$$

mentre per $x \to 0^+$, sfruttando l'approssimazione fatta prima, si ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x(1 + o(1)}{x} \to 2 = f'_+(0)$$

Quindi f è derivabile in 0 se

$$b = f'_-(0) = f'_+(0) = 2 \Longleftrightarrow b = 2$$

Infine per quanto riguarda l'ultima condizione osserviamo che per $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{(1 + 2\arctan(x))\,(1 + x^2)} > 0$$

Quindi dobbiamo imporre che la derivata prima risulti > 0 anche per $x < 0$:

$$f'(x) = 2 + 2cx > 0 \Longleftrightarrow cx > -1, x < 0$$

e questo è verificato se $c < 0$. Quindi la soluzione cercata è

$$a = 0,\ b = 2,\ c < 0\ .$$