

## Successioni

1. Provare che le seguenti disuguaglianze sono verificate definitivamente

- (a)  $n^2 + 2n > 10n$
- (b)  $\sqrt{3n^2 + 100} < 2n - 10$
- (c)  $\sqrt{16n^2 - 100} > \pi n + 100$

2. Calcolare limiti delle seguenti successioni e stabilire se i limiti sono raggiunti per eccesso o per difetto:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-100}{n^2+2}$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)(n-6)(n-100)}{n^4}$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2-100}$
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n}$

3. Dire se esistono i limiti delle seguenti successioni :

- (a)  $x_n = \frac{(-1)^n(n+1)!+56 \cdot 5^n}{n! \cdot n}$
- (b)  $x_n = \frac{15 \cdot n^2 + 5 \cdot 3^n}{(-1)^n 6^n - n^6}$

4. Calcolare il limite per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni. Se sono infinite o infinitesime calcolarne, se esiste, l'ordine. Se il limite è finito determinare se il limite raggiunto per eccesso o per difetto.

- (a)  $\sqrt{n^3 + 8^2} \cdot \frac{6n + (\frac{2}{3})^n}{n(n+8)} ; \quad \frac{(2n^5 3^n + 5n^{10})^2}{\sqrt{81^n + 5n^6}} ;$
- (b)  $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^2 ; \quad \sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - n^2 ;$
- (c)  $\sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - 2n^2 ; \quad \sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^2 ;$
- (d)  $\frac{(n+1)^n n^2 + (n+3)! n^2}{n^n + 6} \cdot \left( \sqrt{9n^8 + n^2} - 3n^4 \right) ;$
- (e)  $\frac{n^{2n} (\sqrt{n^2+n}-n)}{(n+1)^n + 2^n n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} ; \quad \frac{\sqrt{n^{16} + 2n^6 + n^4}}{n^2} - \frac{n^4 + 1}{n^2} ;$
- (f)  $n^6 \cdot \left( \sqrt{n^{12} + 2n^2 + 1} - n^2 (n^4 + 1) \right) ;$
- (g)  $\frac{\ln(n^n) - n^2 + \ln(n!) - n^3 \ln(n)}{\ln(n^3) + n^{-3} - \ln(n)} \cdot (4n^{-3} + 5^{-n}) ;$
- (h)  $\frac{(n+2)^5 - (n-2)^5}{4n^4 + \sqrt{n} n^2} ;$
- (i)  $((-1)^n n^2 + n) (4n^{-3} + 5^{-n} + (-1)^n 3n^2) ;$

5. Calcolare il limite per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni. Se sono infinite o infinitesime calcolarne, se esiste, l'ordine. Se il limite è finito determinare se il limite raggiunto per eccesso o per difetto.

- (a)  $\left( \frac{n!+100^n+n^{1000}}{(n-1)!+6+8^{-n}} \right) \cdot \frac{2}{4n}$
- (b)  $\left( \frac{n!-4n^4}{2^n} \right) \cdot ((n+1)!)^{-1}$
- (c)  $\left( \frac{(n+1)!-4n^2-2}{(3/2)^n-6n^8} \right) \cdot \left( \frac{-2^n+n^{100}}{2\cdot n!+5n} \right)$
- (d)  $((n!)^{-1} - 2n^{-4} + n^{-n}) \cdot (3n^4 + 5) \cdot (n^{-2} + 5n^{-1/2} + 8)$
- (e)  $\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot (2^{-n}+8\sqrt{n}8^n+5)}{2^n2^{2n}}$
- (f)  $\left( \frac{n^{n-2}+n}{4\cdot n} - \frac{4\cdot n^2+n^{n-1}}{4\cdot n^2} \right)$
- (g)  $\frac{n^{-4}-5n^{-6}}{6n^{-6}+2n^{-8}} - \frac{n^2}{6}$
- (h)  $\left( \frac{(n+2)!-4n^2-2}{n^22^n-6n^8} \right) \cdot \left( \frac{-2^n+n^{100}}{2\cdot n!+5n} \right)$
- (i)  $\left( \frac{2\cdot n!-4\cdot 3^n}{3\cdot n^n+18\cdot n^2} \right) \cdot \left( \frac{-(n+1)\cdot n^n+(n+1)!}{-2\cdot (n+1)!+3} \right)$
- (j)  $\left( \frac{4^n-3^n\cdot n^2}{3\cdot n^{-2}+18\cdot (n!)^{-1}} \right) \cdot \left( \frac{4^{-n}-5\cdot (n!)^{-1}}{5\cdot 3^n+26\cdot 2^n} \right) \cdot \frac{3^n}{2\cdot n^2}$
- (k)  $\left( \frac{n^{n-2}+n}{4\cdot n+\sqrt{n}} - \frac{4\cdot n^2+n^{n-1}}{4\cdot n^2} \right)$
- (l)  $\frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+5}-(n+6)}{-n+\sin(n)+\ln(n\sqrt{n})}$
- (m)  $\frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+5}-(2n+6)}{-n+\sin(n)}$
- (n)  $\frac{n^2+3^{-n}+6}{(-1)^n n+\sqrt{n}}$
- (o)  $(\cos(1/n))^{1/n} - \cos(1/n^2)) \cdot \frac{((n+4)!+100^n)n^n}{(n+1)^{n+1}n!}$
- (p)  $\left[ \left( 1 + \frac{1}{(n-2)!} \right)^{1/3} - e^{n^{-n}} \right] \cdot \frac{n!+(n-1)!\ln(n)}{n^2e^{1/n}+n}$
- (q)  $\frac{\ln(n!)}{n}$

6. Calcolare il limite per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni:

- (a)  $\frac{4^n n^2}{6^n} ; \frac{(n-10)!}{100^n} ; \frac{(n+100)!}{n^{(n-10)}}$
- (b)  $\frac{(n-4)!}{(7^n)^{300}} ; \frac{n^n}{(2n)!} ; \frac{(2n)!}{3^n n^n}$
- (c)  $\frac{n! 4^n}{n^n} ; \frac{(n+6)! 2^n}{n^n} ; \frac{(n-3)!}{n^{100}} \left( \frac{1}{100} \right)^n$
- (d)  $\frac{(n!)^2}{n^n} ; \frac{n^n}{(2^n)^n} ; \frac{(2n)!}{(2^{n^2})}$

7. Disporre in ordine di infinito/infinitesimo crescente le seguenti successioni:

- (a)  $n^4 5^n$  ,  $n^{-3} 6^n$  ,  $\frac{n!}{(n-5)!}$  .  
 (b)  $(2^n)^2$  ,  $2^{n^2}$  ,  $\left(\frac{(2n)!}{(2n-1)!}\right)^n$  .  
 (c)  $2^{-n}$  ,  $(\frac{2}{3})^n$  ,  $\frac{n^5}{3^n}$  .  
 (d)  $(\sqrt{4n^4 + n + 2} - 2n^2)$  ,  $(\log_{10}(n))^{-3} + 5n^{-2}$  ,  $(-1)^n \log_{10}(n) n^{-2}$   
 (e)  $2^n \arctan(n)$  ,  $n^{\ln(n)}$  ,  $\ln^n(n)$  .

8. Trovare sup/max e inf/min dei seguenti insiemi:

- (a)  $\left\{ \frac{n-1}{n^2-4} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{2\} \right\}$   
 (b)  $\left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$   
 (c)  $\left\{ \frac{(-1)^n n - 12}{n+6} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$   
 (d)  $\left\{ \frac{n \sin(2/3\pi n) - 6}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$   
 (e)  $\left\{ n^{\frac{(-1)^n}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  (svolto nell'ultima pagina.)  
 (f)  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1-(-1)^n}{2}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

9. Data la successione

$$x_n = \left( \frac{n^{10} + 6}{n! + n^2} \right)^n$$

stabilire quali fra le seguenti successioni è sottosuccessione di  $x_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \left( \frac{(3n)^{10} + 6}{(3n)! + (3n)^2} \right)^{3n} \\ b_n &= \left( \frac{(n+7)^{10} + 6}{(n+7)! + (n+7)^2} \right)^{n+7} \\ c_n &= \left( \frac{(n-4)^{10} + 6}{\frac{(n-2)!}{(n-2)(n-3)} + (n-7)^2} \right)^{n-4} \\ d_n &= \left( \frac{(2n)^{10} + 8}{(2n)! + 4n^2} \right)^{2n} \\ e_n &= \left( \frac{(5n)^{10} + 6}{(5n)! + 30n^2} \right)^n \\ f_n &= \left( \left( \frac{(3n)^{10} + 6}{(3n)! + 9n^2} \right)^n \right)^3 \end{aligned}$$

10. Utilizzando il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccessioni calcolare i seguenti limiti

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 7n + 5)^{\frac{1}{2n^2 + 14n + 10}}$   
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sin(n))^{-\frac{3}{n + \sin(n)}}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{4n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$   
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

11. Utilizzare il teorema del confronto o il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccessioni per stabilire quali delle successioni che seguono sono regolari, ossia esiste il limite

(a)  $\left(\frac{(-1)^n n^2+5}{\sqrt{n+6}}\right)$   
 (b)  $(-1)^n \cdot \left(\frac{n^2+5}{n^3+6}\right)$   
 (c)  $\frac{(-1)^n n+\ln(n)}{n+\sqrt[3]{n}}$   
 (d)  $\frac{\sin(n\pi/2) n^4+n^2}{n^4 \ln(n)+n^2}$   
 (e)  $\frac{\sin(n\pi/2) n^4+n^2}{n^4+n^2}$   
 (f)  $\frac{\sin(n\pi/2) n^4+4n^4+n^2}{n^4+n^2}$   
 (g)  $\frac{4^{n(-1)^n}+n^3}{n^4+3^n}$   
 (h)  $\frac{4^{n(-1)^n}+n^3}{n^4+5^n}$   
 (i)  $n^{\frac{(-1)^n}{n}}$

12. Determinare punti di accumulazione, punti interni, punti di frontiera e punti isolati dei seguenti insiemi

(a)  $\left\{ (-1)^n \frac{n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$   
 (b)  $\left\{ (-1)^n \frac{n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left( -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$   
 (c)  $\left\{ \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

- Determinare il sup/inf del seguente insieme

$$E := \left\{ n^{\frac{(-1)^n}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

In questo tipo di esercizi l'idea è di applicare il teorema del limite di successioni monotone. In questo caso, tuttavia, non è evidente la monotonia della successione che definisce  $E$  a causa del termine oscillante  $(-1)^n$ . Per eliminare l'oscillazione l'idea è di dividere la successione  $x_n = n^{\frac{(-1)^n}{n}}$  nelle due sottosuccessioni dei pari e dei dispari:

$$p_n = (2n)^{\frac{1}{2n}}, \quad d_n = (2n-1)^{\frac{-1}{2n-1}} = \frac{1}{(2n-1)^{\frac{1}{2n-1}}}$$

Quindi posto

$$E_p := \{p_n\}, \quad E_d := \{d_n\}$$

Il sup e l'inf di  $E$  saranno determinati da quelli di  $E_d$  ed  $E_d$  osservando che valgono le relazioni

$$\sup E = \max\{\sup E_p, \sup E_d\}, \quad \inf E = \min\{\inf E_p, \inf E_d\}$$

Ora si osservi che le successioni

$$(2n)^{\frac{1}{2n}}, \quad (2n-1)^{\frac{-1}{2n-1}}$$

sono sottosuccessioni di  $n^{1/n}$ ; sarà quindi sufficiente capire la monotonia di quest'ultima per determinare le altre. Ora

$$n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$$

quindi la monotonia sarà determinata da quella di  $\frac{\ln n}{n}$  in quanto la funzione esponenziale è strettamente crescente e non cambia la monotonia della successione. Allora

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n(n+1)}(n \ln(n+1) - (n+1) \ln(n)) = \frac{1}{n(n+1)} \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{n} \right)$$

quindi il segno dipende esclusivamente dal logaritmo ed in particolare se il suo argomento è maggiore o minore di 1:

$$\left( \frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{n} < 1 \iff \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < n$$

$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  è la successione di Bernoulli che è strettamente crescente e converge ad  $e \sim 2,71\dots$  Quindi la diseguaglianza è verificata per  $n = 3$ , mentre per

$$n = 1 \Rightarrow 2 > 1, \quad n = 2 \Rightarrow 9/4 > 2$$

quindi la successione  $n^{1/n}$  è decrescente per  $n \geq 3$  mentre decresce per  $n = 1, 2$ . Di conseguenza la successione

$$p_n = (2n)^{1/(2n)}$$

è descritta a partire da  $n = 2$ , mentre la successione

$$d_n = \frac{1}{(2n-1)^{\frac{1}{2n-1}}}$$

è crescente a partire da  $n = 2$ . Quindi

$$\sup(E_p) = \max\{p_1, p_2\} = \max\{\sqrt{2}, \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}\} = \sqrt{2}, \quad \inf(E_p) = \min\{\sqrt{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{1/(2n)} = 1\} = 1$$

Mentre

$$\inf(E_d) = \min\{d_1, d_2\} = \min\{1, 3^{-(1/3)}\} = 3^{-(1/3)}$$

e

$$\sup(E_d) = \max\{d_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)^{-1/(2n-1)} = 1\} = 1$$

quindi in particolare 1 è  $\max E_d$ . In conclusione

$$\sup E = \max\{\sup E_p, \sup E_d\} = \max\{\sqrt{2}, 1\} = \sqrt{2}$$

e

$$\inf E = \min\{\inf E_p, \inf E_d\} = \min\{1, 3^{-(1/3)}\} = 3^{-(1/3)}$$

Si noti infine che  $\sqrt{2}$  è massimo di  $E$  e che  $3^{-(1/3)}$  è minimo di  $E$ .