

Operazioni sulle funzioni

1. Risolvere le seguenti disequazioni

(a) $\frac{x+5}{x-6} < x+3$

(b) $\frac{x^2-3x+2}{x-1} \leq (2-x)$

(c) $\frac{\sqrt{x}-4}{x-1} \geq 2$

(d) $\frac{x+2}{x-2} < |x+5|$

(e) Trovare max/min e sup/inf degli insiemi definiti dalle disequazioni 2a, 2b e 2c.

2. Trovare max/min e sup/inf dei seguenti insiemi

(a) $E := \left\{ \frac{n-1}{n+4} \right\}, n \in \mathbb{N}$

(b) $E := \left\{ \frac{2n+1}{n-1} \right\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

(c) $E := \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n-1} \right\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

3. Date le funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 6} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 3x}$$

calcolarne il dominio. Inoltre dati gli insiemi

$$D_1 = [0, +\infty) \quad , \quad D_2 = [1, 4] \quad , \quad D_3 = [-2, 2]$$

calcolare, le seguenti controimmagini (osservare che la controimmagine dell'unione di insiemi è uguale alla unione delle controimmagini):

(a) $f^{-1}(D_1), f^{-1}(D_2), f^{-1}(D_3), f^{-1}(D_2 \cup D_3),$

(b) $g^{-1}(D_1), g^{-1}(D_2), g^{-1}(D_3), g^{-1}(D_1 \cup D_2).$

4. Date le funzioni

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad h(x) = x^2 + x - 6 \quad , \quad g(x) = \log_{10}(x) \quad , \quad m(x) = |x| \quad , \quad l(x) = x^3 + x \quad .$$

Calcolare le seguenti composizioni e i corrispondenti domini

(a) $f \circ h \quad , \quad h \circ f$

(b) $g \circ h \quad , \quad h \circ g$

(c) $h \circ m \quad , \quad m \circ h$

(d) $g \circ l \quad , \quad l \circ g$

(e) $g \circ h \circ f$, $f \circ h \circ g$.

5. Stabilire, dopo aver tracciato il grafico, quali delle seguenti funzioni è invertibile

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ -x + 4 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2} & x \in [1, 2] \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, 1) \\ \sqrt{x} & x \in [1, 2] \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ -x + 3 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

6. Verificare che le seguenti coppie di funzioni sono una l'inversa dell'altra

(a) $f(x) = \frac{x^3+4}{5}$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5x-4}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x+2} \upharpoonright (-2, +\infty)$ e $f^{-1}(x) = \frac{1-2y}{y} \upharpoonright (0, +\infty)$

(c) $f(x) = (x-1)^2 \upharpoonright [1, +\infty)$ e $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x} \upharpoonright [0, +\infty)$

(d) $f(x) = (x-1)^2 \upharpoonright (-\infty, 1]$ e $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x} \upharpoonright [0, +\infty)$

(e) $f(x) = x^2 - 6x + 8 \upharpoonright [3, +\infty)$ e $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{1+x} \upharpoonright [-1, +\infty)$

7. Risolvere le seguenti disequazioni

(a) $x^2 + |x| - 2 > 2$

(b) $1 < x^2 + |x| - 2 < 2$

(c) $\sqrt{-x^2+4} < x+5$

(d) $1 < \log_2(x^2 - 6x + 5) \leq 2$

(e) $1 < \log_{1/2}(x^2 - 6x + 5) \leq 2$

(f) $3 < e^{2x} - e^x - 12 < 10$

(g) $-2 < \ln(|x| - 5) < 4$

(h) $x^4 + 4x^2 - 5 > 0$

(i) $-x^4 + 4x^2 - 5 > 1$

(j) $0 < \log_3^2(x) + 4\log_3(x) - 3 < 2$

8. Studiare il dominio di definizione, provare (usando la monotonia) l'invertibilità e calcolare l'inversa delle seguenti funzioni

- (a) $\log_3(1 + x^3)$
- (b) $\sqrt{4 + 2^x}$
- (c) $\sqrt[3]{6 + \log_5(x)}$

9. Trovare gli insiemi in cui le seguenti funzioni sono invertibili e calcolarne le inverse

- (a) $\cosh(x)$
- (b) $\sqrt{e^{x^2} + 1}$
- (c) $\log_2(x^2 - 3x + 2)$

10. Utilizzando le proprietà del logaritmo e dell'esponenziale provare le seguenti identità

- (a) $\frac{4 \log_2(4)}{\log_3(27) + \log_3(9)} = \frac{8}{5}$
- (b) $\frac{\log_2(16) - \log_2(4)}{\log_6(2^3 3^3)} = \frac{2}{3}$
- (c) $\log_7(5) \log_5(7^4 7^6) = 10$
- (d) $-\log_5((25^6)^{10}) + \log_5(5^4 \cdot 25^3) = -110$
- (e) $\frac{\log_2(3) (\log_3(16) - \log_3 4)}{\log_6(2^3 3^3)} = \frac{2}{3}$

11. Calcolare l'immagine delle funzioni nei corrispondenti domini o negli insiemi indicati (Vedere esempio a fine foglio degli esercizi)

- (a) $x^2 - 4$
- (b) $x^2 - 4$ per $x \in [-2, 4)$
- (c) $\frac{x-1}{x+5}$
- (d) $\ln(x + 6)$ per $x \in [-2, 0]$
- (e) $2^{x^2} - 8$ per $x \in [0, +\infty)$

Esempio di calcolo dell'immagine. Sia data la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

calcolare la sua immagine, e calcolare l'immagine dell'intervallo $[0, 2]$.

Svolgimento. Rispondiamo alla prima domanda. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ calcolare la sua immagine equivale a risolvere il seguente problema: trovare $y \in \mathbb{R}$ che risolvono la seguente equazione

$$y = x^2 - 2x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Questa equazione è equivalente a

$$y = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4, \quad x \in \mathbb{R},$$

e questa è equivalente alla seguente equazione

$$x - 1 = \pm\sqrt{y + 4}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq -4$$

Quindi vediamo che l'equazione di partenza è risolta per tutti gli $y \geq -4$. Quindi $[-4, +\infty)$ è l'immagine della funzione. Nella seconda domanda si impone una restrizione sui possibili valori della x . Quindi bisogna imporre tale restrizione sull'ultima equazione. Ossia osservando che $x = 1 \pm \sqrt{y + 4}$ abbiamo un sistema di due disequazioni

$$0 \leq 1 + \sqrt{y + 4} \leq 2, \quad 0 \leq 1 - \sqrt{y + 4} \leq 2, \quad -4 \leq y.$$

La prima si risolve facilmente osservando che è equivalente a

$$-1 \leq \sqrt{y + 4} \leq 1, \quad -4 \leq y.$$

ma la radice ha immagine positiva quindi la prima disuguaglianza è verificata. Per la seconda osservando che abbiamo a che fare con quantità positive e che x^2 strettamente crescente in tale intervallo si ha

$$\sqrt{y + 4} \leq 1, \quad -4 \leq y \iff y + 4 \leq 1, \quad -4 \leq y$$

quindi la prima disequazione ha soluzione in $y \in [-4, -3]$. Per la seconda aggiungendo -1 a tutti i membri e cambiando di segno porta a

$$1 \geq \sqrt{y + 4} \geq -1, \quad -4 \leq y.$$

La seconda disuguaglianza è sempre verificata. La prima procedendo come nel caso precedente porta a

$$1 \geq y + 4, \quad -4 \leq y$$

quindi si ottiene lo stesso risultato di prima: $y \in [-4, -3]$. Quindi $f([0, 2]) = [-4, 3]$

Esempio calcolo dell'inversa. Studiare l'invertibilità e calcolarne, dove definite, le inverse della funzione

$$f(x) = \arctan(x^2 - 6x + 8)$$

Svolgimento Vediamo dove la funzione è invertibile. Si osservi che completando il quadrato del polinomio di secondo grado si ha

$$f(x) = \arctan(x^2 - 6x + 8) = \arctan(x^2 - 6x + 9 - 1) = \arctan((x - 3)^2 - 1)$$

da cui segue, ricordando che $\arctan(x)$ è strettamente crescente, che

$$f_+ : 0f \upharpoonright [3, +\infty), \text{ strettamente crescente ; } f_- := f \upharpoonright (-\infty, 3], \text{ strettamente decrescente}$$

quindi è invertibile su ognuno di questi due intervalli.

Calcolare l'inversa equivale ad esplicitare i punti del dominio x come funzione dei punti dell'immagine della funzione; ossia equivale a risolvere un'equazione del tipo

$$y = \arctan(x^2 - 6x + 8) = \arctan((x - 3)^2 - 1)$$

cercando se possibile di esplicitare la x come funzione della y . Allora osserviamo

$$\begin{aligned} y = \arctan((x - 3)^2 - 1) &\iff \begin{cases} \tan(y) = (x - 3)^2 - 1 \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \iff \\ \begin{cases} \tan(y) + 1 = (x - 3)^2 \\ y \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{\tan(y) + 1} \\ y \in (-\pi/2, \pi/2), \tan(y) \geq -1 \end{cases} \iff \\ &\begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{\tan(y) + 1} \\ y \in (-\pi/4, \pi/2) \end{cases} \end{aligned}$$

Ora l'indeterminazione del $\pm$ è legata al fatto che la funzione di partenza non è invertibile su tutto il suo dominio ma solo su due intervalli di $\mathbb{R}$. Si vede a questo punto facilmente che

$$f_+ = f \upharpoonright [3, +\infty) \text{ , } (f_+)^{-1}(y) = 3 + \sqrt{\tan(y) + 1} \text{ } y \in (-\pi/4, \pi/2)$$

$$f_- = f \upharpoonright (-\infty, 3] \text{ , } (f_-)^{-1}(y) = 3 - \sqrt{\tan(y) + 1} \text{ } y \in (-\pi/4, \pi/2)$$

in quanto nel primo caso l'immagine di $(f_+)^{-1}$ è $[3, +\infty)$ mentre nel secondo caso l'immagine di $(f_-)^{-1}$ è $(-\infty, 3]$