

Induzione matematica, disequazioni e numeri reali

1. Usando il principio di induzione dimostrare che sono vere le seguenti relazioni

(a) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} \cdot b^k , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(b) Provare che per $a \in (0, 1)$ vale la diseguaglianza

$$(1 - a)^n < \frac{1}{1 + na}$$

(c) Trovare una formula per $\sum_{k=1}^n k^2$ e provarla per induzione. *Suggerimento:* le sommatorie possono essere viste come degli integrali discreti e l'integrale indefinito di x^2 è, a meno di costanti, x^3 . Da questa osservazione, ugualare $\sum_{k=1}^n k^2$ ad un generico polinomio di ordine 3 nella variabile n , determinarne le costanti e verificarne la correttezza di quanto ottenuto per induzione.

(d) Provare che la diseguaglianza di Bernoulli vale in senso stretto per $n \geq 2$ e $h \geq -1$ e $h \neq 0$, ossia

$$(1 + h)^n > (1 + nh) , \quad \forall n \geq 2, h \geq -1, h \neq 0 .$$

2. **Binomio di Newton.** Il *fattoriale* di un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale $n!$ definito dalle relazioni

$$0! = 1 , \quad n! := n(n-1)! .$$

Usando il fattoriale possiamo definire i *coefficienti binomiali*: per ogni coppia di naturali k, n tale che $k \leq n$ sia

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si provi che valgono le seguenti relazioni

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} , \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

(a) Usando la formula del binomio di Newton provare che per il trinomio vale la seguente relazione

$$(a + b + c)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \left(\frac{n!}{k!m!(n-m-k)!} \right) a^m b^k c^{n-m-k}$$

(b) Utilizzare la formula del binomio di Newton per dimostrare che la cardinalità dell'insieme delle parti $P(X)$ di un insieme di n elementi è pari a 2^n . (*Suggerimento: pensare a quanti sono i sottoinsiemi di X con k -elementi*).

1. Sia \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi. Si consideri il prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (dove $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ indica l'insieme degli interi escluso lo zero). Si consideri la seguente relazione sugli elementi (m, n) dell'insieme $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

$$(m, n) \sim (l, k) \iff mk = nl .$$

- (a) Provare che si tratta di una relazione di equivalenza.
 (b) Indicando con $[m, n]$ la classe di equivalenza associata a (m, n) , si definiscano

$$[m, n] + [k, l] := [lm + nk, ln] , \quad [m, n] \cdot [k, l] := [mk, ln] .$$

Provare che le operazioni $+$ e \cdot sono ben definite operazioni sulle classi di equivalenza
 (Ad esempio, per la somma, questo vuol dire che se $(m_1, n_1) \sim (m, n)$ allora $(lm_1 + n_1 k, ln_1) \sim (lm + nk, ln)$)

- (c) Provare che l'operazione di somma ha un'unità (lo zero) e che ogni elemento ha un opposto.
 (d) Provare che l'operazione di prodotto ha un'unità e che ogni elemento diverso dallo zero della somma ha un inverso.
 (e) Indicando con \mathbb{Q} l'insieme delle classi di equivalenza provare che si tratta di un campo totalmente ordinato.

2. Provare che i seguenti numeri sono irrazionali:

- (a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$;
 (b) $2 + \sqrt{2}$, $4 \cdot \sqrt{2}$, $\frac{3}{5} + 8\sqrt{3}$.

3. Provare che sono vere le seguenti affermazioni:

- (a) se $p \in \mathbb{Q}$ e $r \in Irr(\mathbb{R})$ allora $p + r \in Irr(\mathbb{R})$.
 (b) se $p \in \mathbb{Q}$ e $p \neq 0$ ed $r \in Irr(\mathbb{R})$ allora $p \cdot r \in Irr(\mathbb{R})$.

4. Dire se è vera la seguente affermazione: *la somma ed il prodotto di numeri irrazionali è un numero irrazionale*. Nel caso in cui non sia vera fare degli esempi.

5. Provare che se $k \in \mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = k .$$

(Suggerimento: procedere come nella dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$; e usare la fattorizzazione in numeri primi dei naturali).

6. Sfruttando il precedente esercizio provare che se $k \in \mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^\ell = k .$$

per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ con $\ell \geq 2$.

7. Dire se le seguenti diseguaglianze sono vere:

$$\sqrt{2} > \frac{11}{8} , \quad \sqrt{\frac{3}{5}} < \frac{4}{5} , \quad \sqrt{\frac{6}{9}} > \frac{7}{9} , \quad \frac{-2 + \sqrt{17}}{2} > \frac{3}{2} , \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2} > \frac{2}{7} , \quad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\pi}}{4} > \frac{3}{2}$$

8. Si ricordi che se E è un insieme di numeri positivi l'allineamento decimale che definisce l'estremo inferiore α di E è definito dalle relazioni

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \in Min(E) , \quad a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} \notin Min(E) , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Si applichi questa proprietà ai seguenti insiemi

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\} , \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 2\} , \quad C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 3\}$$

per calcolare, a meno di quattro cifre decimali, i seguenti irrazionali

$$\sqrt{2} , \quad \sqrt[3]{2} , \quad \sqrt{3} .$$

9. Calcolare sup / inf , max / min degli insiemi

- (a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{11x-42}{x-6} > (x-6)\right\} \cup \{-1, 3, 4, 6\}$
- (b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{x-5} \leq 1\right\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{x-5} \leq 1\right\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{6}{x-6} < -1\right\} \cup \mathbb{N}$

Proposition 0.1. *L'insieme dei razionali \mathbb{Q} non è completo*

Proof. Proviamo che l'insieme $D = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q, q^2 \leq 2\}$ se ammette un estremo superiore M nei razionali allora $M^2 = 2$. Questo non è possibile, ne segue l'incompletezza dei razionali.

Supponiamo che $M^2 > 2$. Cerchiamo un razionale positivo $\epsilon > 0$ tale che $M - \epsilon > 0$ e $(M - \epsilon)^2 > 2$. Si osservi che

$$(M - \epsilon)^2 > 2 \iff M^2 - 2 > 2M\epsilon - \epsilon^2$$

Allora è sufficiente dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che $M^2 - 2 > 2M\epsilon$ in quanto

$$M^2 - 2 > 2M\epsilon > 2M\epsilon - \epsilon^2 \Rightarrow (M - \epsilon)^2 > 2$$

Che tale ϵ esiste segue dalla proprietà Archimedea dei razionali in quanto

$$M^2 - 2 > 2M\epsilon \iff \frac{M^2 - 2}{2M} > \epsilon$$

e $\frac{M^2 - 2}{2M} > 0$. Quindi $(M - \epsilon)^2 > 2$ da cui segue che $(M - \epsilon)$ è un maggiorante di D strettamente più piccolo di M . Questo non è possibile in quanto M è per ipotesi il più piccolo dei maggioranti.

Supponiamo invece che $M^2 < 2$. Cerchiamo un razionale $\epsilon > 0$ e $(M + \epsilon)^2 < 2$. Si osservi che

$$(M + \epsilon)^2 < 2 \iff M^2 - 2 < -2M\epsilon - \epsilon^2 \iff 2 - M^2 > 2M\epsilon + \epsilon^2.$$

Imponiamo che $\epsilon < 1$ e osserviamo che è sufficiente dimostrare che $2 - M^2 > 2M\epsilon + \epsilon^2$ in quanto $\epsilon^2 < \epsilon$ e

$$2 - M^2 > 2M\epsilon + \epsilon^2 > 2M\epsilon + \epsilon^2 \Rightarrow (M + \epsilon)^2 < 2$$

Che tale razionale esiste segue di nuovo dalla proprietà Archimedea dei razionali in quanto

$$2 - M^2 > 2M\epsilon + \epsilon^2 \iff \frac{2 - M^2}{2M + 1} > \epsilon$$

e $\frac{2 - M^2}{2M + 1} > 0$. Quindi $(M + \epsilon)^2 < 2$ ossia $M + \epsilon \in D$ ma $M + \epsilon > M$, quindi M non sarebbe un maggiorante di D .

L'unica possibilità allora è che $M^2 = 2$, ma questo come sappiamo non è possibile. \square