Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 17-02-2025 – I turno

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{|x-a|}{x-a-1}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

$[a = (2, 3, 4, 5)$

Esercizio 2. [6 punti] Siano $a \in \mathbb{R}$ e

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < a \\ x(x-2) & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

(i) Determinare gli insiemi immagine $f((-\infty, a))$ e $f([a, +\infty))$.
(ii) Per quali valori di a f è iniettiva in $\mathbb{R}$?
(iii) Per quali valori di a f è suriettiva in $\mathbb{R}$?
(iv) Per quali valori di a f è biiettiva in $\mathbb{R}$?

Altre versioni ($[B, C, D]$):

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x > a \\ x(x+2) & \text{se } x \leq a, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < a \\ x(2-x) & \text{se } x \geq a, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > a \\ -x(x+2) & \text{se } x \leq a. \end{cases}$$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(z + \mathrm{i}a)^3 - \mathrm{i}a = 0$$

$[a = 8, 27, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}]$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^8}e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n}{\sqrt{a^2n^4 - a^2} - an^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Esercizio 5. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo, se esiste finito, per $\beta = \frac{a}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \left(\frac{ax}{1 - ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{\frac{|x-a|}{x-a-1}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

[$a = (2, 3, 4, 5)$

Svolgimento: Dominio di f: $\{x \neq a+1\}$. Risulta:

$$\lim_{x\to(a+1)^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to(a+1)^+} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = a+1 \text{ asintoto verticale (destro)}}$

Inoltre si noti che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{a-x}{x-a-1}} = xe^{-1}e^{\frac{-1}{x-a-1}} & x < a \\ xe^{\frac{x-a}{x-a-1}} = xee^{\frac{1}{x-a-1}} & x \geq a \end{cases}$$

Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = xe^{\frac{x-a}{x-a-1}} = xee^{\frac{1}{x-a-1}} = xe(1 + \frac{1}{x-a-1} + o(\frac{1}{x})) = xe + e + o(1)$$

Pertanto $f(x) \to +\infty$ se $x \to +\infty$ e $\boxed{y = e(x+1) \text{ è l'equazione dell'asintoto obliquo a } +\infty}$

Analogamente, per $x \to -\infty$, si ha

$$f(x) = xe^{\frac{a-x}{x-a-1}} = xe^{-1}e^{\frac{-1}{x-a-1}} = xe^{-1}(1 - \frac{1}{x-a-1} + o(\frac{1}{x})) = xe^{-1} - e^{-1} + o(1)$$

Pertanto $f(x) \to -\infty$ se $x \to -\infty$ e $\boxed{y = e^{-1}(x-1) \text{ è l'equazione dell'asintoto obliquo a } -\infty}$

Risulta: $f \geq 0$ se $x \geq 0$, $x \neq a+1$ e $f < 0$ se $x < 0$

$$f'(x) = e^{\frac{|x-a|}{x-a-1}} \left(1 + x \cdot \frac{\text{segno}(x-a)\cdot(x-a-1) - |x-a|}{(x-a-1)^2}\right) = e^{\frac{|x-a|}{x-a-1}} \left(1 - \frac{x \cdot \text{segno}(x-a)}{(x-a-1)^2}\right)$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{a-x}{x-a-1}}}{(x-a-1)^2}\,(x^2 - (2a+1)x + (a+1)^2) & x < a \\ \frac{e^{\frac{x-a}{x-a-1}}}{(x-a-1)^2}\,(x^2 - (2a+3)x + (a+1)^2) & x > a, x \neq a+1 \end{cases}$$

In $x = a$ f non è derivabile per il teorema del valor medio poiché

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = 1 - a \qquad \lim_{x\to a^-} f'(x) = 1 + a$$

Quindi $\boxed{x = a \text{ è un punto angoloso}}$

Inoltre $f'(x) > 0$ per $x < a$, quindi $\boxed{f \text{ è crescente in } (-\infty, a)}$

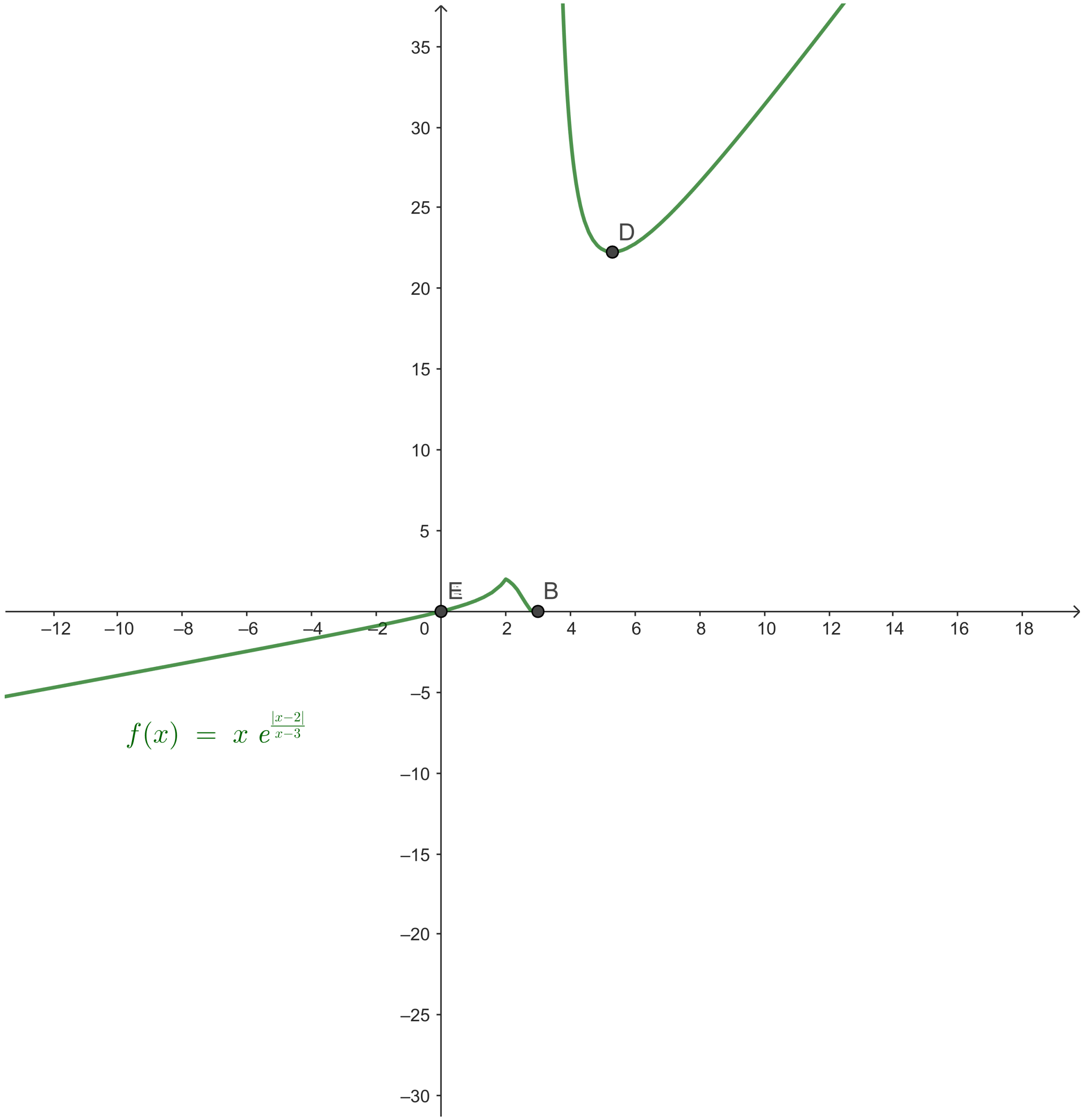
Mentre per $x > a$, $x \neq a+1$, il segno di f' coincide con il segno di $x^2 - (2a+3)x + (a+1)^2$.

Si osservi che le radici del polinomio di secondo grado sono $x_\pm = \frac{2a+3\pm\sqrt{4a+5}}{2}$ e verificano $x_- < a < a+1 < x_+$. Quindi,

$\boxed{f \text{ è decrescente in } (a, a+1)}$ $\boxed{f \text{ è decrescente in } (a+1, x_+)}$ $\boxed{f \text{ è crescente in } (x_+, +\infty)}$

$\boxed{x = a \text{ è punto di massimo relativo}}$ mentre $\boxed{x = x_+ \text{ è punto di minimo relativo}}$

Inoltre, $lim_{x\to(a+1)^-} f'(x) = 0$



35
30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−12
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
16
18
D
E
B
$f(x) = x\, e^{\frac{|x-2|}{x-3}}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Siano $a \in \mathbb{R}$ e

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < a \\ x(x-2) & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

(i) Determinare gli insiemi immagine $f((-\infty, a))$ e $f([a, +\infty))$.
(ii) Per quali valori di a f è iniettiva in $\mathbb{R}$?
(iii) Per quali valori di a f è suriettiva in $\mathbb{R}$?
(iv) Per quali valori di a f è biiettiva in $\mathbb{R}$?

Altre versioni ($[B, C, D]$):

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x > a \\ x(x+2) & \text{se } x \leq a, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < a \\ x(2-x) & \text{se } x \geq a, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > a \\ -x(x+2) & \text{se } x \leq a. \end{cases}$$

Svolgimento: (nel caso della versione $[A]$).
Si noti che f è convessa in $[a, +\infty)$ e che

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = a - 1, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = a(a-2), \quad f'_-(a) = 1, \quad f'_+(a) = 2(a-1).$$

Inoltre $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$.

(i) $f((-\infty, a)) = (-\infty, a-1)$ e $f([a, +\infty)) = [\min_{[a,+\infty)} f, +\infty) = \begin{cases} [-1, +\infty) & \text{se } a \leq 1 \\ [a(a-2), +\infty) & \text{se } a > 1. \end{cases}$

(ii) Si noti che f è iniettiva in $(-\infty, a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e che f è iniettiva in $[a, +\infty)$ se e solo se $a \geq 1$. Perciò f è iniettiva in $\mathbb{R}$ se e solo se $a \geq 1$ e $f((-\infty, a)) \cap f([a, +\infty)) = \emptyset$, ovvero se e solo se $a \geq 1$ e, per il punto (i), $a - 1 \leq a(a-2) = a^2 - 2a$ ($\Leftrightarrow$ $a^2 - 3a + 1 \geq 0$), ovvero se e solo se

$$a \geq \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

(iii) Per il punto (i), f è suriettiva in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\begin{cases} a - 1 \geq -1 & \text{se } a \leq 1 \\ a - 1 \geq a(a-2) = a^2 - 2a & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a \leq \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

(iv) f è biiettiva in $\mathbb{R}$ se e solo se è iniettiva e suriettiva, ovvero se e solo se $a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(z + \mathrm{i}a)^3 + \mathrm{i}a = 0$$

$[a = 8, 27, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}]$

Svolgimento: L'equazione può essere riscritta nella forma:

$$(z + \mathrm{i}a)^3 = -ia$$

Ponendo $w := z + \mathrm{i}a$, si ha $w^3 = -\mathrm{i}a$ Ed essendo $-\mathrm{i}a = ae^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}}$, ponendo $w = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, si ha $\rho = a^{\frac{1}{3}}$ e $3\mathrm{i}\theta = \frac{-\pi}{2}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}$ con $k = 0, 1, 2$. Quindi si ottiene $\theta = \frac{-\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$ e le soluzioni dell'equazione $w^3 = -\mathrm{i}a$ sono

$$w_1 = a^{\frac{1}{3}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = a^{\frac{1}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i})$$
$$w_2 = a^{\frac{1}{3}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = a^{\frac{1}{3}}\mathrm{i}$$
$$w_3 = a^{\frac{1}{3}}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = a^{\frac{1}{3}}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i})$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione $(z + ia)^3 + ia = 0$ sono

$$z_1 = a^{\frac{1}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}) - \mathrm{i}a$$
$$z_2 = a^{\frac{1}{3}}\mathrm{i} - \mathrm{i}a$$
$$z_3 = a^{\frac{1}{3}}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}) - \mathrm{i}a$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^8}e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n}{\sqrt{a^2n^4 - a^2} - an^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Si ha al numeratore: $\log(n+\frac{a^2}{n^5})-\log n = \log n(1+\frac{a^2}{n^6})-\log n = \log(1+\frac{a^2}{n^6}) = \frac{a^2}{n^6}(1+o(1))$. D'altra parte $\frac{1}{n^8}e^{-n^2} = o(\frac{1}{n^6})$ e $\frac{\sin n}{n!} = o(\frac{1}{n^6})$. Pertanto il numeratore

$$\frac{1}{n^8}e^{-n^2} + \frac{\sin n}{n!} + \log(n + \frac{a^2}{n^5}) - \log n = \frac{a^2}{n^6}(1 + o(1))$$

Al denominatore, il termine

$$\sqrt{a^2n^4 - a^2} = an^2(1 - \frac{1}{n^4})^{\frac{1}{2}} = an^2\left(1 - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{8n^8} + o(\frac{1}{n^8})\right) = an^2 - \frac{a}{2n^2} - \frac{a}{8n^6} + o(\frac{1}{n^6})$$

Mentre

$$-an^2\cos(\frac{1}{n^2}) = -an^2(1 - \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{24n^8} + o(\frac{1}{n^8})) = -an^2 + \frac{a}{2n^2} - \frac{a}{24n^6} + o(\frac{1}{n^6})$$

Pertanto il denominatore si comporta come

$$\sqrt{a^2n^4 - a^2} - an^2\cos(\frac{1}{n^2}) = -\frac{a}{6}\frac{1}{n^6}(1 + o(1))$$

Pertanto il limite vale:

$$-6a$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolarlo, se esiste finito, per $\beta = \frac{a}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \left(\frac{ax}{1-ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Poiché $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione potrebbe essere illimitata sia per $x \to 0^+$ che per $x \to \frac{1}{a}^-$. Per $x \to 0^+$, $\left(\frac{ax}{1-ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} \sim Cx^{\frac{\beta}{a}}$ per qualche costante $C > 0$ pertanto la funzione è integrabile vicino a zero se $\frac{\beta}{a} > -1$.

Per $x \to \frac{1}{a}^-$ invece

$$\left(\frac{ax}{1-ax}\right)^{\frac{\beta}{a}} \sim \frac{C}{(1-ax)^{\frac{\beta}{a}}}$$

Quindi la funzione è integrabile vicino a $\frac{1}{a}$ se $\frac{\beta}{a} < 1$. Perciò l'integrale è finito se e solo se $|\beta| < a$.

Calcoliamo l'integrale per $\beta = \frac{a}{2}$, cioè:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx.$$

Ponendo $t = \sqrt{\frac{ax}{1-ax}}$ si ha $x = \frac{t^2}{a(1+t^2)}$ e $dx = \frac{2t}{a(1+t^2)^2} dt$ Inoltre per $x = 0 \Rightarrow t = 0$ mentre per $x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = +\infty$ Perciò otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{ax}{1-ax}} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

Poiché $\left(-\frac{1}{1+t^2}\right)' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$, integrando per parti si ha:

$$\frac{1}{a} \int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{a} \frac{-t}{1+t^2} + \frac{1}{a} \arctan t + C$$

pertanto

$$\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{a} \lim_{\omega \to +\infty} \left(\frac{-\omega}{1+\omega^2} + \arctan \omega\right) = \frac{\pi}{2a}$$

Pertanto l'integrale vale

$$\frac{\pi}{2a}$$