Induzione matematica, disequazioni e numeri reali

1. Usando il principio di induzione dimostrare che sono vere le seguenti relazioni

   (a) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

   $$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} \cdot b^k \ , \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

   (b) Provare che per $a \in (0,1)$ vale la disuguaglianza

   $$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

   (c) Trovare una formula per $\sum_{k=1}^n k^2$ e provarla per induzione. *Suggerimento*: le sommatorie possono essere viste come degli integrali discreti e l'integrale indefinito di x^2 è, a meno dicostanti, x^3. Da questa osservazione, ugugliare $\sum_{k=1}^n k^2$ ad un generico polinomio di ordine 3 nella variabile n, determinarne le costanti e verificarne la correttezza di quanto ottenuto per induzione.

   (d) Provare che la disuguaglianza di Bernoulli vale in senso stretto per $n \geq 2$ e $h \geq -1$ e $h \neq 0$, ossia

   $$(1+h)^n > (1+nh) \ , \qquad \forall n \geq 2, \ h \geq -1, \ h \neq 0 \ .$$

2. **Binomio di Newton.** Il *fattoriale* di un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale $n!$ definito dalle relazione

   $$0! = 1 \quad , \quad n! := n\,(n-1)! \ .$$

   Usando il fattoriale possiamo definire i *coefficienti binomiali*: per ogni coppia di naturali k, n tale che $k \leq n$ sia

   $$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

   Si provi che valgono le seguenti relazioni

   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

   Dare una dimostrazione combinatoriale (usando le proprietà del fattoriale) della formula del binomio di Newton:

   $$(a+b)^n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

   Usando la formula del binomio di Newton provare che per il trinomio vale la seguente relazione

   $$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} \left(\frac{n!}{k!m!(n-m-k)!} \right) a^m b^k c^{n-m-k}$$

1. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Si consideri il prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (dove $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ indica l'insieme degli interi escluso lo zero). Si consideri la seguente relazione sugli elementi (m,n) dell'insieme $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

   $$(m,n) \sim (l,k) \iff mk = nl \ .$$

(a) Provare che si tratta di una relazione di equivalenza.

(b) Indicando con $[m,n]$ la classe di equivalenza associata a (m,n), si definiscano

$$[m,n]+[k,l]:=[lm+nk,ln] \quad , \quad [m,n]\cdot[k,l]:=[mk,ln] \ .$$

Provare che le opearzioni $+$ e $\cdot$ sono ben definite operazioni sulle classi di equivalenza (Ad esempio, per la somma, questo vuol dire che se $(m_1,n_1)\sim(m,n)$ allora $(lm_1+n_1k,ln_1)\sim(lm+nk,ln)$)

(c) Provare che l'operazione di somma ha un'unità (lo zero) e che ogni elemento ha un opposto.

(d) Provare che l'operazione di prodotto ha un'unità e che ogni elemento diverso dallo zero della somma ha un inverso.

(e) Indicando con $\mathbb{Q}$ l'insieme delle classi di equivalenza provare che si tratta di un campo totalemente ordinato.

2. Provare che i seguenti numeri sono irrazionali:

   (a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$;

   (b) $2+\sqrt{2}$, $4\cdot\sqrt{2}$, $\frac{3}{5}+8\sqrt{3}$.

3. Provare che sono vere le seguenti affermazioni:

   (a) se $p\in\mathbb{Q}$ e $r\in Irr(\mathbb{R})$ allora $p+r\in Irr(\mathbb{R})$.

   (b) se $p\in\mathbb{Q}$ e $p\neq 0$ ed $r\in Irr(\mathbb{R})$ allora $p\cdot r\in Irr(\mathbb{R})$.

4. Dire se è vera la seguente affermazione: *la somma ed il prodotto di numeri irrazionali è un numero irrazionale*. Nel caso in cui non sia vera fare degli esempi.

5. Provare che se $k\in\mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=k \ .$$
(Suggerimento: procedere come nella dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$; e usare la fattorizzazione in numeri primi dei naturali).

6. Sfruttando il predente esercizio provare che che se $k\in\mathbb{N}$ con k numero primo ≥ 2 allora non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che
$$\left(\frac{m}{n}\right)^\ell=k \ .$$
per ogni $\ell\in\mathbb{N}$ con $\ell\geq 2$.

7. Dire se le seguenti disuguaglianze sono vere:
$$\sqrt{2}>\frac{11}{8} \quad , \quad \sqrt{\frac{3}{5}}<\frac{4}{5} \quad , \quad \sqrt{\frac{6}{9}}>\frac{7}{9} \quad , \quad \frac{-2+\sqrt{17}}{2}>\frac{3}{2} \quad , \quad \frac{2-\sqrt{3}}{2}>\frac{2}{7} \quad , \quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{\pi}}{4}>\frac{3}{2}$$

8. Si ricordi che se E è un insieme di numeri positivi l'allineamento decimale che definisce l'estremo inferiore α di E è definito dalle relazioni
$$a_0,a_1a_2\ldots a_n\in Min(E) \quad , \quad a_0,a_1a_2\ldots a_n+\frac{1}{10^n}\notin Min(E) \quad , \quad \forall n\in\mathbb{N} \ .$$

Si applichi questa proprietà ai seguenti insiemi

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\} \quad , \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 2\} \quad , \quad C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 3\}$$

per calcolare, a meno di quattro cifre decimali, i seguenti irrazionali

$$\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt[3]{2} \quad , \quad \sqrt{3} \ .$$

9. Calcolare sup / inf , max / min degli insiemi
   (a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{11x-42}{x-6} > (x-6)\right\} \ \cup \ \{-1, 3, 4, 6\}$
   (b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{3}{x-5} \leq 1\right\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{3}{x-5} \leq 1\right\} \ \cup \ \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{6}{x-6} < -1\right\} \ \cup \ \mathbb{N}$

Proposition 0.1. *L'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ non è completo*

Proof. Proviamo che l'insieme $D = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \ , \ q^2 \leq 2\}$ se ammette un estremo superiore M nei razionali allora $M^2 = 2$. Questo non è possibile e da cui segue l'incompletezza dei razionali.

Supponiamo che $M^2 > 2$. Cerchiamo un razionale positivo $\epsilon > 0$ tale che $M - \epsilon > 0$ e $(M - \varepsilon)^2 > 2$. Si osservi che

$$(M - \varepsilon)^2 > 2 \iff M^2 - 2 > 2M\epsilon - \varepsilon^2$$

Allora è sufficiente dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che $M^2 - 2 > 2M\epsilon$ in quanto

$$M^2 - 2 > 2M\epsilon > 2M\epsilon - \epsilon^2 \ \Rightarrow \ (M - \epsilon)^2 > 2$$

Che tale ϵ esiste segue dalla proprietà Archimedea dei razionali in quanto

$$M^2 - 2 > 2M\epsilon \iff \frac{M^2 - 2}{2M} > \epsilon$$

e $\frac{M^2-2}{2M} > 0$. Quindi $(M - \varepsilon)^2 > 2$ da cui segue che $(M - \varepsilon)$ è un maggiorante di D strettamente più piccolo di M. Questo non è possibile in quanto M è per ipotesi il più piccolo dei maggioranti.

Supponiamo invece che $M^2 < 2$. Cerchiamo un razionale $\epsilon > 0$ e $(M + \varepsilon)^2 < 2$. Si osservi che

$$(M + \varepsilon)^2 < 2 \iff M^2 - 2 < -2M\epsilon - \varepsilon^2 \iff 2 - M^2 > 2M\epsilon + \varepsilon^2 \ .$$

Imponiamo che $\epsilon < 1$ e osserviamo che è sufficiente dimostrare che $2 - M^2 > 2M\epsilon + \varepsilon$ in quanto $\epsilon^2 < \epsilon$ e

$$2 - M^2 > 2M\epsilon + \varepsilon > 2M\epsilon + \varepsilon^2 \ \Rightarrow \ (M + \varepsilon)^2 < 2$$

Che tale razionale esiste segue di nuovo dalla proprietà Archimedea dei razionali in quanto

$$2 - M^2 > 2M\epsilon + \varepsilon \iff \frac{2 - M^2}{2M + 1} > \epsilon$$

e $\frac{2-M^2}{2M+1} > 0$. Quindi $(M + \varepsilon)^2 < 2$ ossia $M + \epsilon \in D$ ma $M + \epsilon > M$, quindi M non sarebbe un maggiorante di D.

L'unica possibilità allora è che $M^2 = 2$, ma questo come sappiamo non è possibile. □