Serie numeriche e di potenze

1. Calcolare la somma delle serie

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n} \;,\; \sum_{n=4}^{\infty} \frac{4}{3^n}.}$$

Soluzioni Si tratta di sue serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{9}{1-3/5}$$

mentre

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{4}{3^n} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+4}} = \frac{4}{3^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{4}{3^4} \frac{1}{1-1/3}$$

dove si è posto $k = n-4$.

2. Dare una stima superiore della somma della serie

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{\pi^n} \;,\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+n)2^{n-1}}}$$

Soluzioni L'idea è di maggiorare con serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{\pi^n} \le \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-1/\pi}$$

mentre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+n)2^{n-1}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2}.$$

3. Usando il criterio del confronto asintotico studiare il carattere delle seguenti serie

   (a) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n^3 + 5n^4}{n^3 \ln^6(n) + n^5 + n^5 \ln^2(n)}}$

   Soluzione Posto

$$a_n = fracn^2 - 3n^3 + 5n^4 n^3 \ln^6(n) + n^5 + n^5 \ln^2(n)$$

   si ha

$$a_n = \frac{n^2(1+o(1))}{n^5 \ln^2(n)(1+o(1))} = \frac{1}{n^3 \ln^2(n)}(1+o(1))$$

   che converge per confronto asintotico co la serie $\sum_n \frac{1}{n^3 \ln^2(n)}$.

(b) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(1+n^{-2})}{\sin(n^{-1})+n^{-2}\ln(n)}}$

Soluzione Posto

$$a_n = \frac{n\ln(1+n^{-2})}{\sin(n^{-1})+n^{-2}\ln(n)}$$

sviluppando il logaritmo a numeratore ed il seno a numeratore si ha

$$a_n = \frac{nn^{-2}(1+o(1))}{n^{-1}+o(n^{-1})+n^{-2}\ln(n)} = \frac{n^{-1}(1+o(1))}{n^{-1}+o(n^{-1})} = (1+o(1)) \to 1$$

che non converge perchè non verifica la condizione necessaria per la convergenza.

(c) $\boxed{\sum_{n} \frac{\ln(1+n^4)-4\ln(n)}{\sin(n^{-1})-n^{-1}}}$

Soluzione Posto

$$a_n = \frac{\ln(1+n^4)-4\ln(n)}{\sin(n^{-1})-n^{-1}} = \frac{\ln(1+n^4)-\ln(n^4)}{\sin(n^{-1})-n^{-1}} = \frac{\ln(1+n^{-4})}{\sin(n^{-1})-n^{-1}}$$

sviluppando le funzioni a numeratore e denominatore si ottiene

$$a_n = \frac{\ln(1+n^{-4})}{\sin(n^{-1})-n^{-1}} = \frac{n^{-4}(1+o(1))}{n^{-1}-n^{-3}/6+o(n^{-3})-n^{-1}} = \frac{n^{-4}}{-n^{-3}/6(1+o(1))} = -\frac{1}{6n}(1+o(1))$$

Quindi la serie non converge per confronto con la serie armonica.

(d) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$

Soluzione Si osservi che viluppando prima il logaritmo e poi l'esponenziale si ha

$$\begin{aligned} a_n &= e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e-e^{n\ln(1+n^{-1})} = e-e^{n(n^{-1}-2^{-1}n^{-2}+o(n^{-2}))} \\ &= e-e^{1-2^{-1}n^{-1}+o(n^{-1}))} = e(1-e^{-2^{-1}n^{-1}(1++o(1))}) = e(1-1+2^{-1}n^{-1}+o(n^{-1}) = \frac{e}{2n}(1+o(1)) . \end{aligned}$$

Quindi la serie non converge per confronto con la serie armonica.

(e) $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos(\frac{1}{n})-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} \frac{n}{\ln^2(n)}\ ,\ \ \alpha \geq 0}$

Soluzione. Sviluppando la successione dei termini della serie si ottiene

$$\left(\cos(\frac{1}{n})-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} = \left(1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{2n^2})-1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{2n})\right)^{\alpha} = \frac{1}{(2n)^{\alpha}}(1+o(1))$$

da cui segue che

$$a_n = \left(\cos(\frac{1}{n}) - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{\alpha} \frac{n}{\ln(n)^2} = \frac{1}{2^{\alpha} n^{\alpha-1} \ln^2(n)}(1+o(1))$$

da cui segue che per confronto asintotico la serie converge per $\alpha > 2$ ed anche per $\alpha = 2$ in quanto l'esponente del logaritmi è > 1.

(f) $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)^{n} n^{n-1}}$

Soluzione. Sviluppando la successione dei termini della serie si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)^{n} n^{n-1} = \frac{1}{n} e^{n \ln\left(n\left(1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)\right)} \\ &= \frac{1}{n} e^{n \ln\left(n\left(1-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4!n^2}+o(n^{-2})\right)\right)} = \frac{1}{n} e^{n \ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4!n}+o(n^{-1})\right)} \\ &= \frac{1}{n} e^{-n\ln(2)(1+o(1))} = \frac{1}{n2^n}(1+o(1)) \end{aligned}$$

Da cui segue che la serie converge per confronto asintotico.

(g) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}}\right), \ \ \alpha \geq 0}$

Soluzione. Sviluppando la successione dei termini della serie per $\alpha \neq 1/3$ si ha

$$a_n = \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}}\right) = 1 + \frac{1}{3n} + o(n^{-1}) - 1 - \frac{\alpha}{n} + o(n^{-1}) = \frac{1-3\alpha}{3n} + o(n^{-1})$$

Quindi la serie per $\alpha \neq 1/3$ non converge per confronto asitotico con la serie armonica. Per $\alpha = 1/3$ bisogna aumentare l'approssimazione della successione

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{3n}}\right) = 1 + \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2} + o(n^{-2}) - 1 - \frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + o(n^{-2}) \\ &= -\frac{1}{9n^2} - \frac{1}{18n^2} + o(n^{-2}) = -\frac{1}{6n^2}(1+o(1)) \end{aligned}$$

per cui in questo caso la serie converge per confronto asintotico con la serie definita dalla successione $\frac{1}{n^2}$.

4. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguente serie.

(a) $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} n^{\alpha} \ln\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right), \ \ \alpha \in \mathbb{R}}$

Soluzione. Si tratta di una serie definitivamente positiva. Usando il confronto asintotico si ha

$$a_n = n^\alpha \ln\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right) = n^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{2n^2+1}\right) = \frac{n^\alpha}{2n^2+1}(1+o(1)) = \frac{1}{2n^{2-\alpha}}(1+o(1))$$

da cui segue che la serie converge per confronto asintotico per $2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$.

(b) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}$

Soluzione. Si tratta di una serie termini di segno alterno. Per la convergenza assoluta

$$a_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln(1+n^{-1})} = e - e^{n(n^{-1}-(1/2)n^{-2}+o(n^{-2})} = e(1-e^{-2n^{-1}(1+o(n))}) = \frac{-e}{2n}(1+o(1))$$

quindi la serie non converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica. Tuttavia converge semplicemente: infatti dai precedenti conti si evince $a_n \to 0$. Inoltre sappiamo che la successione di Bernoulli $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e converge ad e. Quindi a_n è decrescente e per Leibniz la serie converge semplicemente.

5. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguente serie.

(a) $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}}$

Soluzione. Per confronto asintotico la serie non converge assolutamente in quanto $a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$. Tuttavia la serie converge, per Leibniz, semplicemente in quanto $a_n \to 0$ in maniera monotona decrescente: infatti $n\ln(n)$ è crescente e >0, quindi $\frac{1}{n\ln(n)}$ è decrescente.

(b) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(2n)!}}$

Soluzione. Si tratta di una serie a temini positivi. Vista la presenza del fattoriale usiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)^{n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(2n)^n} = \frac{(2n+2)(2n+2)^n(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(2n)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2n+1} \to 0$$

in quanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$. Quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

(c) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)^n}{n!}}$

Soluzione. Procedendo come nel precedente esercizio si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(4n+4)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(4n)^n} = \frac{(4n+4)(4n+4)^n n!}{(n+1)n!(4n)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{4n+4}{n+1} \to 4e > 1$$

quindi la serie non converge per il criterio del rapporto.

(d) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+5^n} \ , \ x \in \mathbb{R}}$

Soluzione. Si tratta di una serie di potenze centrata in 0. Calcoliamo il raggio di convergenza:

$$\left(\frac{1}{n^3+5^n}\right)^{1/n} = \left(\frac{1}{5^n}(1+o(1))\right)^{1/n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{5} = r^{-1}$$

quindi la serie converge assolutamente per $x \in (-5,5)$. Usiamo il confronto asintotico per tudiare la serie sulla frontiera dell'intervallo $(-5,5)$. Per $x = 5$ si ha

$$\frac{5^n}{n^3+5^n} \to 1$$

quindi la serie non converge per $x = 5$ perchè non è verificata la condizione necessaria per la convergenza. Stesso discorso vale per $x = -5$.

(e) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 5^n} \ , \ x \in \mathbb{R}}$

Soluzione. Si tratta di una serie di potenze centrata in 0. Calcoliamo il raggio di convergenza:

$$\left(\frac{1}{n^3 5^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n^3}\right)^{1/n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{5} = r^{-1}$$

quindi la serie converge assolutamente per $x \in (-5,5)$. Usiamo il confronto asintotico per tudiare la serie sulla frontiera dell'intervallo $(-5,5)$. Per $x = 5$ si ha

$$\frac{5^n}{n^3 5^n} = \frac{1}{n^3}$$

quindi la serie converge per $x = 5$ ed anche per $x = -5$ in quanto in questo caso la serie è $\sum_n (-1)^n \frac{5^n}{n^3 5^n}$ che per quanto visto prima converge assolutamente. Quindi la serie converge assolutamenete per $x \in [-5,5]$.

(f) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(n^2+1)}{n^3 5^n} \ , \ x \in \mathbb{R}}$

Soluzione. Si tratta di una serie di potenze centrata in 0. Procedendo come prima si verifica che il raggio di convergenza è $r = 5$ e che la serie converge assolutamente per $x \in (-5, 5)$. Per $x = 5$ si ha

$$a_n = \frac{5^n(n^2+1)}{n^3 5^n} = \frac{1}{n}(1 + o(1))$$

quindi non converge per confronto asintotico con la serie armonica. Per $x = -5$ si ha una serie a termini di segno alterno

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$$

chiaramente $a_n \to 0$ in maniera monotona decrescente in quanto è somma di due successioni decrescenti positive

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$$

Quindi la serie converge semplicemente per $x = 5$ e come detto sopra assolutamente per $x \in (-5, 5)$.

(g) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n, \quad \alpha > 0}$

Soluzione. Applicando il criterio della radice si ha:

$$(a_n)^{1/n} = n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{n}{n^\alpha}(1 + o(1)) = \frac{1}{n^{\alpha-1}}(1 + o(1))$$

che tende a $+\infty$ per $0 < \alpha < 1$ (quindi la serie non converge); tende a 0 per $1 < \alpha$ (quindi la serie converge); tende a 1 per $\alpha = 1$. Quindi per $\alpha = 1$ il criterio della radice (ma anche quello del rapporto - verificarlo -) è inefficiente. Usiamo quindi il confronto asintotico:

$$a_n = e^{n \ln \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{n \ln\left(\frac{1}{n}(1+o(1))\right)} = e^{-n\ln(n)}(1 + o(1)) = \frac{1}{n^n}(1 + o(1))$$

il che, chiaramente, implica che le serie converge per confronto asintotico.

(h) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n}$

Soluzione. È una serie a termini positivi. Dato che

$$\begin{aligned} a_n &= \left(n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n = e^{n \ln\left(n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)} \\ &= e^{n \ln\left(n\left(1-1+\frac{1}{2n^2}+o(n^{-2})\right)\right)} = e^{n \ln\left(\frac{1}{2n}+o(n^{-1})\right)} = e^{-n\ln(2n)(1+o(1))} \end{aligned}$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico (si osservi che $e^{-n\ln(2n)}$ è definitivamente minore di e^{-n}, quindi la serie $\sum_n e^{-n\ln(2n)}$ converge per confronto e la serie di partenza converge per confronto asintotico).

(i) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!5^n}}$

Soluzione. È una serie a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!5^{n+1}} \frac{n!5^n}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)(n)!5^{n+1}} \frac{n!5^n}{n^n} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{5} < 1$$

quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

(j) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n!\, e^n}}$

Soluzione. Studiamo la convergeza assoluta. Applicando il criterio del rapporto ed usando i stessi caonti fatti nel precedente esercizio si arriva

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1$$

quindi il criterio del rapporto e quello della radici (provatelo) non permettono di capire il carattere della serie. Studiamo lo sviluppo asintotico di a_n utilizzando la formula di Stirling

$$a_n = \frac{n^n}{n!\, e^n} = \frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, e^n}(1+o(1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(1+o(1))$$

e per confronto asintotico la serie non converge assolutamente. Applichiamo Leibniz: dal conto appena fatto segue che

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(1+o(1)) \to 0$$

Per vedere se a_n è definitivamente decrescente studiamo il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$: abbiamo visto sopra che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

in quanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è una successione strettamente crescente che converge ad e. Quindi a_n è decrescente e per Leibniz la serie converge semplicemente.

(k) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!\, e^n}{n^{(n+1)}}}$

Soluzione. Studiamo la convergeza assoluta. Come prima il criterio del rapporto è inefficiente in quanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, e^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \frac{n^{(n+1)}}{n!\, e^n} = \frac{(n+1)n!\, e^{n+1}}{(n+1)(n+1)^{n+1}} \frac{n^{(n+1)}}{n!\, e^n} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \to 1$$

Studiamo lo sviluppo asintotico di a_n utilizzando la formula di Stirling

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1}} = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, e^n}{n^{n+1}}(1+o(1)) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}(1+o(1))$$

quindi la serie non converge assolutamente. Per la convergenza semplice

$$a_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}(1+o(1)) \to 0$$

mentre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} < 1$$

in quanto la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$ converge in maniera monotona decrescente ad e. Quindi la serie converge semplicemente per Leibniz.

(l) $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\left(\cos(\frac{3}{\sqrt{n}})-1\right)^n n^{n-1}}$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini di segno alterno in quanto $\cos(x) \le 1$. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice

$$|a_n|^{1/n} = \frac{1}{n^{1/n}}\left(n\left(1-\cos\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \frac{1}{n^{1/n}}\left(n\left(1-1+\frac{9}{n}+o(n^{-1})\right)\right) = \frac{9}{n^{1/n}}(1+o(1)) \to 9 > 1$$

quindi la serie non converge assolutamente per il criterio della radice. Inoltre la serie non converge neanche semplicemente in quanto dato $|a_n|^{1/n} \to 9$ allora si verifica facilmente che $a_n \to \infty$.

6. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie di potenze:

(a) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n(x-1)^n}{(2n)!}}$.

Soluzione. Calcoliamo il raggio di convergenza studiado il rapporto a_{n+1}/a_n in quanto è presente un fattoriale:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)^n}{(2n)!}\,\frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{n+1}} = (2n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \infty$$

quindi il raggio di convergenza della serie è $r = \infty$ e la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{2n}(x^2-1)^n}{(2n)!}}$

Soluzione. Anche se la x compare al quadrato possiamo studiarla come una serie di potenze. Poniamo $y = x^2 - 1$ e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n} y^n}{(2n)!}$$

Calcoliamo il raggio di convergenza

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{2n+2}} = \frac{2n+1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} \to e^{-2}$$

quindi il raggio di convergenza è $r = e^{-2}$ e la serie converge assolutamente per $y \in (-e^{-2}, e^{-2})$. Sulla frontiera per $y = e^{-1}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n} e^{-n}}{(2n)!}$ e applicando Stirling

$$a_n e^{-n} = \frac{(2n)^{2n} e^{-n}}{(2n)!} = \frac{(2n)^{2n} e^{-n}}{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}(1+o(1)) = \frac{e^n}{\sqrt{4\pi n}}(1+o(1))$$

che non converge, e quindi non converge neanche per $y = -e^{-1}$. Quindi tornando alla variabile x la serie converge assolutamente per

$$y \in (-e^{-1}, e^{-1}) \iff (x^2-1) \in (-e^{-1}, e^{-1}) \iff 1 - e^{-1} < x^2 < 1 + e^{-1}$$

ossia

$$x \in (-\sqrt{1+e^{-1}}, \sqrt{1+e^{-1}}) \cap \big((-\infty, -\sqrt{1-e^{-1}}) \cup (\sqrt{1-e^{-1}}, \infty)\big)$$

quindi

$$x \in (-\sqrt{1+e^{-1}}, -\sqrt{1-e^{-1}}) \cup (\sqrt{1-e^{-1}}, \sqrt{1+e^{-1}})$$

(c) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \arctan(x)^n}{n^3 + \pi^n}}$

Soluzione. Procedendo come prima si pone $y = \arctan(x)$ e calcoliamo il raggio di convergenza

$$(a_n)^{1/n} = \left(\frac{4^n}{n^3 + \pi^n}\right)^{1/n} = \frac{4}{\pi}(1+o(1))^{1/n} \to \frac{4}{\pi}$$

quindi il raggio di convergenza è $r = \pi/4$ e la serie converge assolutamente per $y \in (-\pi/4, \pi/4)$. Sulla frontiera per $y = \pi/4$ si ha

$$a_n(\pi/4)^n = \frac{\pi^n}{n^3 + \pi^n} \to 1$$

quindi la serie non converge per $y = \pi/4$ perchè non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Conseguentemente non converge neanche per $y = -\pi/4$ in quanto in tal caso la serie diventa $\sum_n (-1)^n a_n(\pi/4)^n$ e dato che $a_n(\pi/4)^n \to 1$ la successione $(-1)^n a_n(\pi/4)^n$ non ammette limite. Quindi la serie converge assolutamente per

$$y \in (-\pi/4, \pi/4) \iff \arctan(x) \in (-\pi/4, \pi/4) \iff x \in (-1, 1)\,.$$

(d) $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{2n+1}}$

Soluzione. Il raggio di convergenza è

$$r^{-1} = \lim_n (|a_n|)^{1/n} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{1/n} = 1$$

quindi la serie converge assolutamente per $x \in (-1,1)$. Per $x = 1$ la serie diventa $\sum_n (-1)^n 2n+1$ che converge per il criterio di Leibniz (chiaramente non converge assolutamente). Per $x = -1$ la serie diventa $\sum_n (-1)^n(-1)^n 2n+1 = \sum_n \frac{1}{2n+1}$ che non converge per confronto asintotico con la serie armonica. Si osservi infine che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{2n+1}$ è la serie di Taylor della funazione $\arctan(x)$.

(e) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n(x-1)^n}{n^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}(x-1)^n}{n^{(n+1)}}}$

Soluzione. Il raggio di convergenza della prima serie vè

$$r^{-1} = \lim_n \left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_n \frac{(n+1)}{n} = 1$$

quindi la serie converge assolutamente per $x - 1 \in (-1,1) \iff x \in (0,2)$. Per $x = 2$ si ha

$$a_n(2-1)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n} \to e$$

quindi la serie per $x = 2$ non converge in quanto è violata la condizione necessaria per la convergenza. Stesso discorso per $x = 0$ in quanto in questo caso la successione dei termini della serie diventa $(-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^n}$ che non ammette limite.

Il raggio di convergenza della seconda serie è sempre uguale a 1 e quindi la serie converge assolutamente per $x \in (0,2)$. Per $x = 2$ si ha

$$a_n(2-1)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \frac{(n+1)^n}{n^n} \to e$$

quindi anche questa serie non converge ne per $x = 2$ che per $x = 0$.

(f) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}(x-1)^n}{n^{n^2}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n(n+1)}(x-1)^n}{n^{n(n+1)}}}$

Soluzione. Il raggio di convergenza della prima serie è

$$r^{-1} = \lim_n \left(\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}\right)^{1/n} = \lim_n \frac{(n+1)^n}{n^n} \to e$$

Quindi la serie converge assolutamente per $x \in (1 - e^{-1}, 1 + e^{-1})$. Per $x = 1 + e^{-1}$ si ha

$$a_n(1 + e^{-1} - 1)^n = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n} = \left(\frac{(n+1)^n}{n^n e}\right)^n = e^{n(n\ln(1+1/n)-1)}$$
$$= e^{n(n(1/n-1/(2n^2)+o(n^{-2})-1)} = e^{n(-1/2n+o(n^{-1}))} = e^{-1/2}(1+o(1)) \to e^{-1/2}$$

quindi la serie non converge per $x = 1 + e^{-1}$ in quanto è violata la condizione necessaria per la convergenza. Stesso discorso per $x = 1 - e^{-1}$ in quanto in questo caso la successione dei termini della serie diventa $(-1)^n \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n}$ che per quanto visto prima non ammette limite.

Per la seconda serie il raggio di convergenza è

$$r^{-1} = \lim_n \left(\frac{(n+1)^{n^2+n}}{n^{n^2+n}}\right)^{1/n} = \lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \to e$$

Quindi la serie converge assolutamente per $x \in (1 - e^{-1}, 1 + e^{-1})$. Per $x = 1 + e^{-1}$ usando i conti fatti per la precedente serie si ha

$$a_n(1 + e^{-1} - 1)^n = \frac{(n+1)^{n^2+n}}{n^{n^2+n} e^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{(n+1)^n}{n^n e}\right)^n \to e\, e^{-1/2} = e^{1/2}$$

quindi come prima la serie non converge ne per $x = 1 + e^{-1}$ ne per $x = 1 - e^{-1}$