

(1) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1+t, 2t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

(2) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1+t, 2t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

6

(3) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1 + 2t, 1 + 2t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= 2 \int_0^1 \left((1 + 2t) \log(1 + 2t) - (1 + 2t) \operatorname{arctg}(1 + 2t) \right) dt \stackrel{(a)}{=} \int_1^3 x(\log x - \operatorname{arctg} x) dx \\ &\stackrel{(b)}{=} \left[\frac{1}{2} x^2 (\log x - \operatorname{arctg} x) \right]_1^3 - \frac{1}{2} \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \left[x^2 (\log x - \operatorname{arctg} x) - \frac{1}{2} x^2 + x - \operatorname{arctg} x \right]_1^3 \\ &= -1 + \frac{\pi}{4} - 5 \operatorname{arctg} 3 + \frac{9}{2} \log 3,\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $2t + 1 = x$, per cui $2dt = dx$, e in (b) l'integrazione per parti

$$\text{con } \begin{cases} f(x) = \log x - \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 1}, \\ g'(x) = x \implies g(x) = \frac{1}{2} x^2. \end{cases}$$

(4) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (t^{3/2} - te^t) dt \stackrel{(a)}{=} \left[\frac{2}{5} t^{5/2} - te^t \right]_0^1 + \int_0^1 e^t dt = \left[\frac{2}{5} t^{5/2} + (1 - t)e^t \right]_0^1 = -\frac{3}{5},$$

dove in (a) si è usata l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(t) = t \implies f'(t) = 1, \\ g'(t) = e^t \implies g(t) = e^t. \end{cases}$

(5) Una parametrizzazione della spezzata è $\gamma(t) = \begin{cases} (1 - t, 0), & t \in [0, 1], \\ (0, t - 1), & t \in [1, 2]. \end{cases}$ Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \frac{-dt}{(2 - t)^2} + \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{1}{t - 2} \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = 0.$$

(6) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left(\sin t \cos^2 t (-\sin t) + \cos t \cos t \right) dt = \int_0^{\pi} \cos^4 t dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right]_0^{\pi} = \frac{3}{8} \pi.\end{aligned}$$

(7) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left(\sin^2 t e^{\cos t} (-\sin t) - \cos t \sin t \cos t \right) dt = - \int_0^{\pi} \left(\sin^3 t e^{\cos t} + \cos^2 t \sin t \right) dt \\ &\stackrel{(a)}{=} - \int_{-1}^1 \left((1 - x^2) e^x + x^2 \right) dx \stackrel{(b)}{=} \left[(x^2 - 2x + 1) e^x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3} - \frac{4}{e},\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $\cos t = x$, per cui $-\sin t dt = dx$, e in (b) il risultato $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$.

(8) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left(\cos t \sqrt{1 - \sin t} (-\sin t) + \cos t \cos t \right) dt \stackrel{(a)}{=} \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la disparità della funzione $\sin t \cos t \sqrt{1 - \sin t}$ rispetto all'intervallo d'integrazione.

(9) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} (t \sin t + t^2 \sin t \cdot 2t) dt = \int_0^{\pi} (2t^3 + t) \sin t dt \stackrel{(a)}{=} \left[-(2t^3 + t) \cos t \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (6t^2 + 1) \cos t dt \\ &\stackrel{(b)}{=} \left[-(2t^3 + t) \cos t + (6t^2 + 1) \sin t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 12t \sin t dt \\ &\stackrel{(c)}{=} \left[-(2t^3 + t) \cos t + (6t^2 + 1) \sin t + 12t \cos t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 12 \cos t dt \\ &= \left[-(2t^3 - 11t) \cos t + (6t^2 - 11) \sin t \right]_0^{\pi} = 2\pi^3 - 11\pi,\end{aligned}$$

dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(t) = 2t^3 + t \implies f'(t) = 6t^2 + 1, \\ g'(t) = \sin t \implies g(t) = -\cos t, \end{cases}$ in (b)

con $\begin{cases} f(t) = 6t^2 + 1 \implies f'(t) = 12t, \\ g'(t) = \cos t \implies g(t) = \sin t, \end{cases}$ in (c) con $\begin{cases} f(t) = 12t \implies f'(t) = 12, \\ g'(t) = \sin t \implies g(t) = -\cos t. \end{cases}$

(10) Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (t(-\sin t) + \cos t \cos t + 1) dt \stackrel{(a)}{=} \left[t \cos t - \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + t \right]_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{3}{2} 2\pi = 5\pi,$$

dove in (a) si sono usati i risultati $\int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = \sin t - t \cos t + C$, e $\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C$.

(11) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (t^2 + t^2 - t) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(12) Una parametrizzazione della spezzata è $\gamma(t) = \begin{cases} (0, 0, t), & t \in [0, 1], \\ (0, t - 1, 1), & t \in [1, 2], \\ (t - 2, 1, 1), & t \in [2, 3]. \end{cases}$ Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 0 dt + \int_2^3 dt = 1.$$

□

Svolgimento esercizio 4

- (1) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x+y} = -\frac{x}{(x+y)^2} \neq \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x+y} = -\frac{y}{(x+y)^2}$, per cui ω non è chiusa.
- (2) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} x \log(1+xy) = \frac{x^2}{1+xy} \neq \frac{\partial}{\partial x} y \log(1+xy) = \frac{y^2}{1+xy}$, per cui ω non è chiusa.
- (3) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{4xy(1+x^2y^2)^2 - 8x^3y^3}{(1+x^2y^2)^4} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}$, per cui ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} \implies U(x, y) = \int \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} dx + \varphi(y) = -\frac{1}{1+x^2y^2} + \varphi(y)$, e deve essere $\frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = -\frac{1}{1+x^2y^2}$.
- (4) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (ye^x - e^y) = e^x - e^y = \frac{\partial}{\partial x} (e^x - xe^y)$, per cui ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = ye^x - e^y \implies U(x, y) = \int (ye^x - e^y) dx + \varphi(y) = ye^x - xe^y + \varphi(y)$, e deve essere $e^x - xe^y = \frac{\partial U}{\partial y} = e^x - xe^y + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = ye^x - xe^y$.
- (5) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (y \cos x - xy \sin x - \sin y) = \cos x - x \sin x - \cos y = \frac{\partial}{\partial x} (x \cos x - x \cos y + 1)$, per cui ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = y \cos x - xy \sin x - \sin y \implies U(x, y) = \int (y \cos x - xy \sin x - \sin y) dx + \varphi(y) = xy \cos x - x \sin y + \varphi(y)$, e deve essere $x \cos x - x \cos y + 1 = \frac{\partial U}{\partial y} = x \cos x - x \cos y + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 1$, e possiamo scegliere $\varphi(y) = y$. Quindi $U(x, y) = xy \cos x - x \sin y + y$.
- (6) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{y} - 2xy) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2)$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{y} - 2xy \implies U(x, y) = \int (\sqrt{y} - 2xy) dx + \varphi(y) = x\sqrt{y} - x^2y + \varphi(y)$, e deve essere $\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = x\sqrt{y} - x^2y$.
- (7) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} \frac{1+y}{1+x} = \frac{2}{1+x} = \frac{\partial}{\partial x} \log(1+x)$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1+y}{1+x} \implies U(x, y) = \int \frac{1+y}{1+x} dx + \varphi(y) = (1+y) \log(1+x) + \varphi(y)$, e deve essere $\log(1+x) = \frac{\partial U}{\partial y} = \log(1+x) + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = (1+y) \log(1+x)$.
- (8) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} e^{x/y} = -\frac{x}{y^2} e^{x/y} = \frac{\partial}{\partial x} (1 - \frac{x}{y}) e^{x/y}$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, che è semplicemente connesso (cioè le sue componenti connesse lo sono), e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = e^{x/y} \implies U(x, y) = \int e^{x/y} dx + \varphi(y) = ye^{x/y} + \varphi(y)$, e deve essere $(1 - \frac{x}{y}) e^{x/y} = \frac{\partial U}{\partial y} = (1 - \frac{x}{y}) e^{x/y} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = ye^{x/y}$.
- (9) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = 3 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{xy} = \frac{\partial}{\partial x} 3\sqrt{x^3y}$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, che è semplicemente connesso [cioè le sue componenti connesse lo sono], e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = 3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \implies U(x, y) = \int (3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx + \varphi(y) = 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{x} + \varphi(y)$, e deve essere $3\sqrt{x^3y} = \frac{\partial U}{\partial y} = 3\sqrt{x^3y} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{x}$.
- (10) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} y \log(1+xy) = \log(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} = \frac{\partial}{\partial x} x \log(1+xy)$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$, che è semplicemente connesso (cioè le sue componenti connesse lo sono), e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = y \log(1+xy) \implies U(x, y) = \int y \log(1+xy) dx + \varphi(y) =$

$(1 + xy)(\log(1 + xy) - 1) + \varphi(y)$, e deve essere $x \log(1 + xy) = \frac{\partial U}{\partial y} = x \log(1 + xy) + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = (1 + xy)(\log(1 + xy) - 1)$. $\square$

Svolgimento esercizio 5

- (1) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \log \frac{y}{x} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi ω è esatta in A , e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ . Poiché $\gamma(0) = (1, 2)$, $\gamma(1) = (e, 2)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino $\gamma_0(t) = (1 + (e - 1)t, 2)$, $t \in [0, 1]$. Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_0^1 2 \left(\log \frac{2}{1 + (e - 1)t} - 1 \right) (e - 1) dt = 2(e - 1) \log \frac{2}{e} - 2(e - 1) \int_0^1 \log(1 + (e - 1)t) dt \stackrel{(a)}{=} 2(e - 1) \log \frac{2}{e} - 2 \int_1^e \log x dx \stackrel{(b)}{=} 2(e - 1) \log \frac{2}{e} - [x \log x - x]_1^e = 2(e - 1) \log 2 - 2e$, dove in (a) si è usata la sostituzione $x = 1 + (e - 1)t \implies dx = (e - 1) dt$, e in (b) il risultato $\int \log x dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C$.
- (2) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = -15x^2 = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi ω è esatta in A , e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ . Poiché $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma(1) = (1, 1)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino $\gamma_0(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1], \\ (1, t - 1), & t \in [1, 2]. \end{cases}$ Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_0^1 t(16t^2 + 2) dt + \int_1^2 (3(t - 1)^2 - 5) dt = [4t^4 + t^2]_0^1 + [(t - 1)^3 - 5t]_1^2 = 1$.
- (3) Indichiamo con $\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 4xz = \frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial z} = 2y = \frac{\partial h}{\partial y}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^3$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi ω è esatta in A , e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ . Poiché $\gamma(0) = (1, 1, 0)$, $\gamma(1) = (e, 1, 2)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino $\gamma_0(t) = \begin{cases} (1, 1, 2t), & t \in [0, 1], \\ (e^{t-1}, 1, 2), & t \in [1, 2]. \end{cases}$ Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_0^1 (1 + 2t)2 dt + \int_1^2 (3e^{2(t-1)} + 1 + 8e^{t-1})e^{t-1} dt \stackrel{(a)}{=} [2t + 2t^2]_0^1 + \int_1^e (3x^2 + 8x + 1) dx = 4 + [x^3 + 4x^2 + x]_1^e = e^3 + 4e^2 - 1$, dove in (a) si è usata la sostituzione $x = e^{t-1} \implies dx = e^{t-1} dt$.
- (4) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y^3 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di una forma esatta $\omega_1 = x^3y^4 dx + x^4y^3 dy$ [perché chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso], e di una forma chiusa non necessariamente esatta $\omega_2 = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$. Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t - \sin^2 t) dt = -2\pi$.
- (5) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-2)^2 - x^2}{(x^2 + (y-2)^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \setminus \{(0, 2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di una forma esatta

$\omega_1 = (\sqrt{y} - 2xy) dx + (\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2) dy$ [perché chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, che è semplicemente connesso], e di una forma chiusa non necessariamente esatta $\omega_2 = \frac{y-2}{x^2+(y-2)^2} dx - \frac{x}{x^2+(y-2)^2} dy$. Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t) = (\cos t, 2 + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma_0} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$.

(6) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x-2)^2-(y-2)^2}{((x-2)^2+(y-2)^2)^2} + \frac{9}{2}\sqrt{xy} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \setminus \{(2, 2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di una forma esatta $\omega_1 = (3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx + 3\sqrt{x^3y} dy$ [perché chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è semplicemente connesso], e di una forma chiusa non necessariamente esatta $\omega_2 = \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dx - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dy$. Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t) = (2 + \cos t, 2 + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma_0} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$.

(7) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x-2)^2-(y-2)^2}{((x-2)^2+(y-2)^2)^2} + e^x - e^y = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (2, 2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ è la somma di una forma esatta $\omega_1 = (ye^x - e^y) dx + (e^x - xe^y) dy$ [perché chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è semplicemente connesso], e di due forme chiuse non necessariamente esatte $\omega_2 = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$, e $\omega_3 = \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dx - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dy$. Osserviamo anche che la forma ω_3 è esatta in una regione semplicemente connessa contenente D , ad esempio in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\}$. Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 + \int_{\gamma} \omega_3 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma_0} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$.

(8) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, ω non è chiusa. Appliciamo la formula di Gauss-Green, ottenendo $\int_{\partial^+ D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x}{(1+y)^2} - 2xy \right) dy = \int_0^1 \left[-\frac{x}{1+y} - xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 -\frac{x}{2} dx = \left[-\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}$.

(9) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, ω non è chiusa. Appliciamo la formula di Gauss-Green, ottenendo $\int_{\partial^- D} \omega = - \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} \left(y + \frac{1}{1+y^2} \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 + \arctg y \right]_{x-1}^{1-x} dx = \int_0^1 (\arctg(1-x) - \arctg(x-1)) dx \stackrel{(a)}{=} 2 \int_0^1 \arctg t dt = 2 \left[t \arctg t \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2} - \left[\log(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2$, dove in (a) si è usata la sostituzione $t = 1 - x$.

(10) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, ω

non è chiusa. Applichiamo la formula di Gauss-Green, ottenendo $\int_{\partial^+ D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = - \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 d\varrho = - \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^1 = - \frac{\pi}{8}$.

(11) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} - 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di due forme chiuse $\omega_1 = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} dy$, e $\omega_2 = \frac{-2y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2x}{x^2 + y^2} dy$. Calcoliamo i periodi di ω relativi alle due lacune $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Il periodo relativo alla lacuna $(0, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(a)}{=} \int_\gamma \omega_2 = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -4\pi$, dove in (a) si è usato il fatto che ω_1 è esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$.

Il periodo relativo alla lacuna $(1, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(b)}{=} \int_\gamma \omega_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$, dove in (b) si è usato il fatto che ω_2 è esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Quindi $\int_\gamma \omega = -4\pi + 2\pi = -2\pi$.

(12) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo che $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ è la somma di tre forme chiuse $\omega_1 = \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2} dx - \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} dy$, $\omega_2 = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, e $\omega_3 = -\frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$. Calcoliamo i periodi di ω relativi alle due lacune $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Il periodo relativo alla lacuna $(0, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(a)}{=} \int_\gamma (\omega_2 + \omega_3) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$, dove in (a) si è usato il fatto che ω_1 è esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$.

Il periodo relativo alla lacuna $(1, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(b)}{=} \int_\gamma \omega_1 = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -4\pi$, dove in (b) si è usato il fatto che ω_2 e ω_3 sono esatte in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Quindi $\int_\gamma \omega = -2\pi + 4\pi = 2\pi$.

□