Analisi Matematica II
Calcolo differenziale per funzioni di più variabili (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Intanto f è continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in $(x_0, 0)$, si ha $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{xy(1+o(1))}{y} = x_0 = f(x_0,0) \iff x_0 = 0$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0,0)\}$.

(2) Intanto f è continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in $(0, y_0)$, si ha $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{xy(1+o(1))}{x} = y_0 = f(0,y_0) \iff y_0 = 0$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0,0)\}$.

(3) Intanto f è continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in $(0, y_0)$, si ha $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \operatorname{arctg} x \sin\left(\frac{|y|}{x}\right) = 0 = f(0,y_0)$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(4) La continuità di f in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\neq 0}} \sqrt[3]{1+y}\ \exp\left(\frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right) = +\infty.$$

Invece, in $(0,0)$, si ha $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq 0}} f(x,y) \neq f(0,0)$, in quanto

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \sqrt[3]{1+y}\ \exp\left(\frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x}\ \exp\left(\frac{1}{2x^2}\right) = +\infty.$$

Quindi f è continua in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

(5) Intanto f è continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} x^2 \sin\left(\frac{y^3}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} xy^3(1+o(1))\cos\left(\frac{1}{y}\right) = 0 = f(x_0,0),$$

e in $(0, y_0)$, si ha $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} x^2 \sin\left(\frac{y^3}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right) = 0 = f(0,y_0)$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(6) Intanto f è continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in $(x_0, -x_0)$, $x_0 \neq 0$, si ha $\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = \nexists$, e in $(0,0)$ si ha $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = \nexists$, in quanto $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = 0$, mentre

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x+x^4}} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(-x+x^4)^3}{x^3+(-x+x^4)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^6(1+o(1))}{3x^6(1+o(1))} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi f è continua in A.

(7) Intanto f è continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in (x_0, x_0), $x_0 \neq 0$, si ha $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \nexists$, e in $(0,0)$ si ha $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \nexists$, in quanto $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x-x^3}} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \lim_{x\to0} \frac{x^2+(x-x^3)^2}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{2x^2(1+o(1))}{x^3} = \nexists$. Quindi f è continua in A.

(8) Intanto f è continua in $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1+y+x^2}{y} > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x^2-1\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in $(x_0, 0)$, si ha $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \left(\frac{1+y+x^2}{y}\right)^y = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \exp\big(y\log(1+y+x^2) - y\log y\big) = 1 = f(x_0,0)$. Quindi f è continua in $A \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\big\}$.

(9) Intanto f è continua in $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\big\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in (x_0, x_0^2), si ha $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y<x^2}} x^2 - y = 0$, e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y\geq x^2}} y^2 + x = x_0^4 + x_0 = 0 \iff x_0 = 0 \vee x_0 = -1$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0,0), (-1,1)\}$.

(10) Intanto f è continua in $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y^3\big\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in (y_0^3, y_0), si ha $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(y_0^3,y_0)\\ x\leq y^3}} x + y^3 = 2y_0^3$, e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(y_0^3,y_0)\\ x>y^3}} x^2 + y^6 = 2y_0^6$, per cui f è continua $\iff y_0^3 = y_0^6 \iff y_0 = 0 \vee y_0 = 1$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0,0), (1,1)\}$.

(11) Intanto f è continua in $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\big\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in (x_0, x_0^2), si ha $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y<x^2}} \sin(xy) = \sin(x_0^3)$, e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2)\\ y\geq x^2}} 0 = 0 = \sin(x_0^3) \iff x_0^3 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$. Quindi f è continua in $A \cup \Big\{(\sqrt[3]{k\pi}, \sqrt[3]{k^2\pi^2}) : k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

(12) Osserviamo che $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, dove $g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \leq 1, \\ \frac{1}{e}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), & t > 1. \end{cases}$ Poiché $\lim_{t\to1^-} e^{-t} = \frac{1}{e} = \lim_{t\to1^+} \frac{1}{e}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = g(1)$, ne segue che $g \in C^0(\mathbb{R})$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(13) Osserviamo che $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, dove $g(t) = \begin{cases} t, & t < 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2, \\ e^{t-2}, & t > 2. \end{cases}$ Poiché $\lim_{t\to1^-} t = 1$, e $\lim_{t\to2^+} e^{t-2} = 1$, ne segue che $g \in C^0(\mathbb{R})$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) La continuità di f in $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\big\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(x_0, 0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\neq0}} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\neq0}} \frac{xy(1+o(1))}{y} = x_0 = f(x_0,0).$$

Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\big\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \cos(xy)\,, \\ f_y(x,y) &= \frac{xy\cos(xy)-\sin(xy)}{y^2}\,. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\big\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(x_0,0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x_0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,0)-f(x_0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{x_0+t-x_0}{t} = 1, \\ f_y(x_0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,t)-f(x_0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(x_0t)-x_0t}{t^2} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}x_0^3t^3(1+o(1))}{t^2}=0 & x_0\neq 0, \\ 0 & x=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\big\}$, perché ivi f è di classe C^1. In $(x_0,0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\neq 0}}\frac{f(x,y)-f(x_0,0)-f_x(x_0,0)(x-x_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\neq 0}}\frac{\sin(xy)-x_0y-(x-x_0)y}{y\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\frac{-\frac{1}{6}x^3y^3(1+o(1))}{y\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} = -\frac{x_0^3}{6}\lim_{(z,y)\to(0,0)}\frac{y^2(1+o(1))}{\sqrt{z^2+y^2}} = -\frac{x_0^3}{6}\lim_{\varrho\to 0}\varrho\sin^2\vartheta = 0, \end{aligned}$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y=0}}\frac{f(x,y)-f(x_0,0)-f_x(x_0,0)(x-x_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y=0}}\frac{x-x_0-(x-x_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

(2) La continuità di f in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\big\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,y_0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}}\frac{y^2\sin x}{x} = y_0^2 = f(0,y_0) \iff y_0 = 0.$$

Quindi f è continua in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\big\}\cup\{(0,0)\}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{y^2(x\cos x-\sin x)}{x^2}\,, \\ f_y(x,y) &= \frac{2y\sin x}{x}\,. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0,y_0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{y_0^2\sin t}{t^2} = \begin{cases} \nexists & y_0\neq 0, \\ 0 & y_0=0, \end{cases} \\ f_y(0,y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,y_0+t)-f(0,y_0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1. In $(0,y_0)$, $y_0 \neq 0$, f non è differenziabile, perché non è continua. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{y^2 \sin x}{x\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(1+o(1))}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho \sin^2\vartheta = 0,$$

e $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ x=0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0\}$.

(3) La continuità di f in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,y_0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} x^2+y^2 = y_0^2,$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y = y_0,$$

per cui f è continua $\iff y_0^2 = y_0 \iff y_0 \in \{0,1\}$. Quindi f è continua in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Si ha

$$f_x(x,y) = 2x\,,$$
$$f_y(x,y) = 2y\,.$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Calcoliamole in $(0,y_0)$. Si ha

$$f_x(0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+y_0^2-y_0}{t} = \begin{cases} \nexists & y_0 \notin \{0,1\}\,, \\ 0 & y_0 \in \{0,1\}\,, \end{cases}$$
$$f_y(0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,y_0+t)-f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{y_0+t-y_0}{t} = 1.$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1. In $(0,y_0)$, $y_0 \notin \{0,1\}$, f non è differenziabile, perché non esiste f_x. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{f(x,y)-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varrho\to 0}(\varrho - \sin\vartheta) = \nexists.$$

In $(0,1)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x\neq 0}} \frac{f(x,y)-f(0,1)-f_y(0,1)y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2-1-y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = \nexists.$$

Quindi f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

(4) La continuità di f in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,y_0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} (x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \nexists & y_0 \neq 0, \\ 0 & y_0 = 0. \end{cases}$$

Quindi f è continua in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{(x+y)^2}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right), \\ f_y(x,y) &= 2(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0, y_0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+y_0)^2}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \nexists & y_0 \neq 0, \\ 0 & y_0 = 0, \end{cases} \\ f_y(0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,y_0+t) - f(0,y_0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1. In $(0,y_0)$, $y_0 \neq 0$, f non è differenziabile, perché non esiste f_x. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x\neq 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x\neq 0}} \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varrho\to 0} \varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)^2 \sin\left(\frac{1}{\varrho\cos\vartheta}\right) = 0,$$

e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ x=0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0\}$.

(5) La continuità di f in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,y_0)$ si ha $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x\neq 0}} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos y = 0$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos y - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cos y, \\ f_y(x,y) &= -x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin y. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0,y_0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\cos y_0 = 0, \\ f_y(0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,y_0+t) - f(0,y_0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1. In $(0,y_0)$, $y_0 \neq 0$, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x\neq 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x\neq 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos y = 0,$$

perché $x^2 \to 0$, e gli altri fattori sono limitati. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos y = 0,$$

perché $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, e gli altri fattori sono limitati. Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

(6) La continuità di f in $\mathbb{R}^2$ segue dal fatto che, posto $g(t) := \begin{cases} t\log|t| & t\neq 0,\\ 0 & t=0,\end{cases}$ che è continua in $\mathbb{R}$, si ha $f(x,y)=g(xy)$. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2$. Si ha $g'(t) = \begin{cases} \log|t|+1 & t\neq 0,\\ \lim_{t\to 0}\frac{t\log|t|}{t} = -\infty, & t=0,\end{cases}$ per cui, se $xy\neq 0$,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= g'(xy)y = y + y\log|xy|\,,\\ f_y(x,y) &= g'(xy)x = x + x\log|xy|\,. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(x_0,0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x_0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,0)-f(x_0,0)}{t} = 0\\ f_y(x_0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,t)-f(x_0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{x_0 t\log|x_0 t|}{t} = \begin{cases} \nexists & x_0\neq 0,\\ 0 & x_0=0.\end{cases} \end{aligned}$$

Calcoliamole in $(0,y_0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{ty_0\log|ty_0|}{t} = \begin{cases} \nexists & y_0\neq 0,\\ 0 & y_0=0,\end{cases}\\ f_y(0,y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,y_0+t)-f(0,y_0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1. Non è differenziabile in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=0\}\setminus\{(0,0)\}$, perché ivi non esiste una delle derivate parziali. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \left(x\log|x|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\log|y|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0,$$

e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ x=0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0\}\cup\{(0,0\}$.

(7) La continuità di f in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2-4\neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. I punti di $C := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2-4=0\}$ si possono descrivere come $x=\cos\alpha$, $y=2\sin\alpha$, $\alpha\in[0,2\pi]$. Allora si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\cos\alpha,2\sin\alpha)\\ (x,y)\notin C}} (4x^2+y^2-4)\cos\left(\frac{1}{4x^2+y^2-4}\right) = 0.$$

Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Si ha

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 8x \cos\left(\frac{1}{4x^2+y^2-4}\right) + \frac{8x}{4x^2+y^2-4} \sin\left(\frac{1}{4x^2+y^2-4}\right), \\
f_y(x,y) &= 2y \cos\left(\frac{1}{4x^2+y^2-4}\right) + \frac{2y}{4x^2+y^2-4} \sin\left(\frac{1}{4x^2+y^2-4}\right).
\end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(\cos\alpha, 2\sin\alpha) \in C$. Si ha

$$\begin{aligned}
f_x(\cos\alpha, 2\sin\alpha) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\cos\alpha + t, 2\sin\alpha) - f(\cos\alpha, 2\sin\alpha)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{4(\cos\alpha+t)^2 + 4\sin^2\alpha - 4}{t} \cos\left(\frac{1}{4(\cos\alpha+t)^2+4\sin^2\alpha-4}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{8t\cos\alpha + 4t^2}{t} \cos\left(\frac{1}{8t\cos\alpha+4t^2}\right) = \begin{cases} \nexists & \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \\
f_y(\cos\alpha, 2\sin\alpha) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\cos\alpha, 2\sin\alpha + t) - f(\cos\alpha, 2\sin\alpha)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{4\cos^2\alpha + (2\sin\alpha+t)^2 - 4}{t} \cos\left(\frac{1}{4\cos^2\alpha+(2\sin\alpha+t)^2-4}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{4t\sin\alpha + t^2}{t} \cos\left(\frac{1}{4t\sin\alpha+t^2}\right) = \begin{cases} \nexists & \alpha \neq 0, \pi, \\ 0 & \alpha = 0, \pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, perché ivi f è di classe C^1. In C, f non è differenziabile, perché o non esiste f_x, o non esiste f_y.

(8) La continuità di f in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. Nei punti di $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2) \\ y<x^2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^2)} \sin(xy) = \sin(x_0^3), \\
&\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2) \\ y\geq x^2}} f(x,y) = 0 = f(x_0, x_0^2),
\end{aligned}$$

e quindi f è continua $\iff \sin(x_0^3) = 0 \iff x_0^3 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Si ha

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \begin{cases} y\cos(xy) & y < x^2, \\ 0 & y > x^2, \end{cases} \\
f_y(x,y) &= \begin{cases} x\cos(xy) & y < x^2, \\ 0 & y > x^2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamo f_x in $(x_0, x_0^2) \in C$. Se $x_0 < 0$, si ha

$$\begin{aligned}
f_{x+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0, \\
f_{x-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\big((x_0 + t)x_0^2\big)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(x_0^3)\cos(x_0^2 t) + \cos(x_0^3)\sin(x_0^2 t)}{t} = \begin{cases} \nexists & x_0 \neq \sqrt[3]{k\pi}, \\ x_0^2 \cos(x_0^3) & x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, \end{cases}
\end{aligned}$$

e quindi f_x non esiste mai. Se $x_0 = 0$, si ha $f_x(0,0) = \lim_{t \to 0^-} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$. Se $x_0 > 0$, si ha

$$\begin{aligned}
f_{x-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0, \\
f_{x+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\big((x_0 + t)x_0^2\big)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(x_0^3)\cos(x_0^2 t) + \cos(x_0^3)\sin(x_0^2 t)}{t} = \begin{cases} \nexists & x_0 \neq \sqrt[3]{k\pi}, \\ x_0^2 \cos(x_0^3) & x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, \end{cases}
\end{aligned}$$

e quindi f_x non esiste mai. Calcoliamo ora f_y. Si ha

$$\begin{aligned}
f_{y+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0, x_0^2 + t) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0, \\
f_{y-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, x_0^2 + t) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\big(x_0(x_0^2 + t)\big)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(x_0^3)\cos(x_0 t) + \cos(x_0^3)\sin(x_0 t)}{t} = \begin{cases} \nexists & x_0 \neq \sqrt[3]{k\pi}, \\ x_0 \cos(x_0^3) & x_0 = \sqrt[3]{k\pi}. \end{cases}
\end{aligned}$$

e quindi f_y esiste solo in $(0,0)$. Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, perché ivi f è di classe C^1. In $C \setminus \{(0,0)\}$, f non è differenziabile, perché non esistono f_x e f_y. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y < x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\varrho \to 0} \varrho \cos\vartheta \sin\vartheta (1 + o(1)) = 0,$$

e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,0) \\ y \geq x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C\big\} \cup \{(0,0\}$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \int_0^{x^2} \frac{1 + \sin(x^2 y^2)}{x^2}\, dy &= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} 1 + \sin(x^2 y^2)\, dy}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x(1 + \sin(x^4)) + \int_0^{x^2} 2x \cos(x^2 y^2)\, dy}{2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(1 + \sin(x^4) + \int_0^{x^2} \cos(x^2 y^2)\, dy\right) = 1,
\end{aligned}$$

perché $x \mapsto \int_0^{x^2} 1 + \sin(x^2y^2)\, dy$, e $x \mapsto \int_0^{x^2} \cos(x^2y^2)\, dy$ sono funzioni continue.

(2) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{y\cos^2(x^2(1+y^2))}{x^2}\, dy &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x y\cos^2(x^2(1+y^2))\, dy}{x^2}\\ &\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos^2(x^2+x^4) - \int_0^x 2xy(1+y^2)\sin(2x^2+2x^2y^2)\, dy}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cos^2(x^2+x^4) - \int_0^x y(1+y^2)\sin(2x^2+2x^2y^2)\, dy\right) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

perché $x \mapsto \int_0^x y\cos^2(x^2(1+y^2))\, dy$, e $x \mapsto \int_0^x y(1+y^2)\sin(2x^2+2x^2y^2)\, dy$ sono funzioni continue.

(3) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2} \frac{(x^2-y)\cos(y^2)}{\sin x^4}\, dy &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(x^2-y)\cos(y^2)\, dy}{\sin x^4} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} 2x\cos(y^2)\, dy}{4x^3\cos x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos(y^2)\, dy}{2x^2\cos(x^4)}\\ &\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^4)}{4x\cos(x^4) - 8x^5\sin(x^4)} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

perché $x \mapsto \int_0^{x^2}(x^2-y)\cos(y^2)\, dy$, e $x \mapsto \int_0^{x^2}\cos(y^2)\, dy$ sono funzioni continue.

(4) Si ha

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{(x-y)e^{-y^2}}{\sin^2 x}\, dy = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-y)e^{-y^2}\, dy}{\sin^2 x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-y^2}\, dy}{2\sin x\cos x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2},$$

perché $x \mapsto \int_0^x (x-y)e^{-y^2}\, dy$, e $x \mapsto \int_0^x e^{-y^2}\, dy$ sono funzioni continue.

(5) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2}\, dy &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 \log(1+x^2y^2)\, dy}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\, dy}{2x} \overset{(xy=t)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\, dt}{2x^3}\\ &\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{6x^2} = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

perché $x \mapsto \int_0^1 \log(1+x^2y^2)\, dy$, e $x \mapsto \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\, dt$ sono funzioni continue.

$\square$

Svolgimento esercizio 4 Ricordiamo che il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$.

(1) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= 3x^2 + 4xy + 3y^2\\ f_y(x,y) &= 2x^2 + 6xy - 12y^2\\ f_{xx}(x,y) &= 6x + 4y\\ f_{xy}(x,y) &= 4x + 6y\\ f_{yy}(x,y) &= 6x - 24y.\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = -15 + 23(x-1) - 34(y-2) + 7(x-1)^2 + 16(x-1)(y-2) - 21(y-2)^2 = 7x^2 + 16xy - 21y^2 - 23x + 34y - 15$.

(2) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \sin y \\ f_y(x,y) &= x \cos y \\ f_{xx}(x,y) &= 0 \\ f_{xy}(x,y) &= \cos y \\ f_{yy}(x,y) &= -x \sin y. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = xy$.

(3) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy + y \sin x \\ f_y(x,y) &= x^2 + \sin x \\ f_{xx}(x,y) &= 2y - y \sin x \\ f_{xy}(x,y) &= 2x + \cos x \\ f_{yy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = \pi^2 y + (2\pi - 1)(x - \pi)y = (2\pi - 1)xy - \pi^2 y + \pi y$.

(4) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^y \sin x \\ f_y(x,y) &= e^y (1 - \cos x) \\ f_{xx}(x,y) &= e^y \cos x \\ f_{xy}(x,y) &= e^y \sin x \\ f_{yy}(x,y) &= e^y (1 - \cos x). \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = \frac{1}{2}x^2$.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -32xy + 1 = 0 \\ f_y(x,y) = 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^{2/3} \\ x^{5/3} = \frac{1}{32} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -32y\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -32x\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 48y^2\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\det H_f(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = -40$, e quindi $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ è un punto di sella.

(2) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) = 0 \\ f_y(x,y) = 4y - 4y^3 = 4y(1-y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Poiché

$$f_{xx}(x,y) = 4 - 12x^2\,,$$
$$f_{xy}(x,y) = 0\,,$$
$$f_{yy}(x,y) = 4 - 12y^2\,,$$

si ha $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4-12x^2 & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$, $\det H_f(x,y) = 16(1-3x^2)(1-3y^2)$, $\operatorname{tr} H_f(x,y) = 4(2 - 3x^2 - 3y^2)$, per cui $\det H_f(\pm1,\pm1) = 64$, $\operatorname{tr} H_f(\pm1,\pm1) = -16$, e quindi $(\pm1,\pm1)$ sono punti di massimo relativo; inoltre $\det H_f(0,\pm1) = \det H_f(\pm1,0) = -32$, e quindi $(0,\pm1)$ e $(\pm1,0)$ sono punti di sella; infine $\det H_f(0,0) = 14$, $\operatorname{tr} H_f(0,0) = 8$, e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo relativo.

(3) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 8x^3 - 2(x+y) = 0 \\ f_y(x,y) = 8y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x^3 - 8y^3 = 0 \\ 4x^3 - x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ 4x^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Poiché

$$f_{xx}(x,y) = 24x^2 - 2\,,$$
$$f_{xy}(x,y) = -2\,,$$
$$f_{yy}(x,y) = 24y^2 - 2\,,$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi nulla si può dire sulla natura di $(0,0)$. Inoltre $H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ e quindi $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono punti di minimo locale.
In realtà, $(0,0)$ è un punto di sella, come si può vedere considerando $f(x,x) = 4x^4 - 4x^2 + 2 < 2 = f(0,0)$, se $|x| < 1$, $x \neq 0$, e $f(x,-x) = 4x^4 + 2 > 2 = f(0,0)$, se $x \neq 0$.

(4) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f_y(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$ che fornisce il punto $(0,0)$. Poiché

$$f_{xx}(x,y) = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)}\,,$$
$$f_{xy}(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}\,,$$
$$f_{yy}(x,y) = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2 e^{-(x^2+y^2)}\,,$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo locale.

(5) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x-y)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f_y(x,y) = -e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x-y)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2x^2+2xy=0 \\ 1-2y^2+2xy=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 1-2x^2+2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ 1-2x^2+2xy=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y=-x \\ 1-2x^2+2xy=0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2xe^{-(x^2+y^2)} - (4x-2y)e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2(x-y)e^{-(x^2+y^2)}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -2ye^{-(x^2+y^2)} + 2xe^{-(x^2+y^2)} + 4xy(x-y)e^{-(x^2+y^2)}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 2ye^{-(x^2+y^2)} - (2x-4y)e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2(x-y)e^{-(x^2+y^2)}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e quindi $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ è un punto di massimo locale, mentre $H_f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e quindi $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è un punto di minimo locale.

(6) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (2x+y)e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)e^{x+2y} = 0 \\ f_y(x,y) = (x+2y)e^{x+2y} + 2(x^2+xy+y^2)e^{x+2y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+xy+y^2+2x+y=0 \\ 2(x^2+xy+y^2)+x+2y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x=0 \\ x^2+xy+y^2+2x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y^2+y=0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$ e $(0,-1)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2(2x+y)e^{x+2y} + 2e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)e^{x+2y}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= 2(2x+y)e^{x+2y} + e^{x+2y} + (x+2y)e^{x+2y} + 2(x^2+xy+y^2)e^{x+2y}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 4(x+2y)e^{x+2y} + 2e^{x+2y} + 4(x^2+xy+y^2)e^{x+2y}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo locale, mentre $H_f(0,-1) = \frac{1}{e^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,-1)$ è un punto di sella.

(7) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (2x+y)e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y} = 0 \\ f_y(x,y) = (x+4y)e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+xy+2y^2+2x+y=0 \\ x^2+xy+2y^2+x+4y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-3y=0 \\ x^2+xy+2y^2+2x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3y \\ 14y^2+7y=0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$ e $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2(2x+y)e^{x+y} + 2e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= (2x+y)e^{x+y} + e^{x+y} + (x+4y)e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 2(x+4y)e^{x+y} + 4e^{x+y} + (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}\,, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo locale, mentre $H_f(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e^2}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ è un punto di sella.

(8) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = \frac{y(1+x^2+y^2)-2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{y-x^2y+y^3}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f_y(x,y) & \frac{x-xy^2+x^3}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1-x^2+y^2) = 0 \\ x(1-y^2+x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 0 \\ 1-y^2+x^2 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0 \\ 1-y^2+x^2 \end{cases}$$

che fornisce il punto $(0,0)$ [gli altri tre sistemi sono assurdi]. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{-2xy(1+x^2+y^2)^2 - 4x(1+x^2+y^2)(y-x^2y+y^3)}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{-6xy+2x^3y-6xy^3}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{(1-x^2+3y^2)(1+x^2+y^2)^2 - 4y(1+x^2+y^2)(y-x^2y+y^3)}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{1-x^4+6x^2y^2-y^4}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{-6xy+2xy^3-6x^3y}{(1+x^2+y^2)^3}, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

(9) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = 4xy + 2y^2 - 2xy^2 - 4y = -2y(x-1)(y-2) = 0 \\ f_y(x,y) & = 2x^2 + 4xy - 2x^2y - 4x = -2x(x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(2,0)$, $(1,1)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4y - 2y^2, \\ f_{xy}(x,y) &= 4x + 4y - 4xy - 4, \\ f_{yy}(x,y) &= 4x - 2x^2, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di sella; $H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0,2)$ è un punto di sella; $H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(2,2)$ è un punto di sella; $H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(2,0)$ è un punto di sella; infine, $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi $(1,1)$ è un punto di minimo assoluto.

(10) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -\cos x \sin(2y) = 0 \\ f_y(x,y) & = -2\cos(2y)\sin x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4})$, $(0,0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \pi)$, $(0, \frac{3\pi}{2})$, $(\pi, 0)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, (π, π), $(\pi, \frac{3\pi}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \sin x \sin(2y)\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -2\cos x \cos(2y)\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 4 \sin x \sin(2y)\,, \end{aligned}$$

si ha:
$H_f(-\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4}) = H_f(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, e quindi $(-\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ sono punti di massimo relativo;
$H_f(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4}) = H_f(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, e quindi $(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ sono punti di minimo relativo;
$H_f(0,0) = H_f(0,\pi) = H_f(\pi, \pm\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi, \pm\frac{\pi}{2})$ sono punti di sella;
$H_f(0, \pm\frac{\pi}{2}) = H_f(\pi, 0) = H_f(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $(0, \pm\frac{\pi}{2})$, $(\pi, 0)$, (π,π) sono punti di sella.

(11) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$ che non fornisce nessun punto. Osserviamo che, poiché $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$, ne segue che $(0,0)$ è un punto di minimo (assoluto).

(12) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x = y|y| = 0 \\ f_y = 2x|y| = 0 \end{cases}$ e quindi sono $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(t,0) = f(0,t) = 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, mentre f è positiva nel primo e terzo quadrante aperti, mentre è negativa nel secondo e quarto quadrante aperti, ne segue che ogni suo punto stazionario è di sella.

$\square$

Svolgimento esercizio 6

(1) Introduciamo $F(x,y) = x(x^2+y^2) - 2y^2$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1,1) = 0$ e $F_x(x,y) = 3x^2 + y^2$, $F_y(x,y) = 2xy - 4y$ e quindi $F_y(1,1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0, \tag{$*$}$$

che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1,1) + F_y(1,1) f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = 2$. L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = 1 + f'(1)(x-1) = 2x - 1$. Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned} F_{xx}(x,y) &= 6x \implies F_{xx}(1,1) = 6, \\ F_{xy}(x,y) &= 2y \implies F_{xy}(1,1) = 2, \\ F_{yy}(x,y) &= 2x - 4 \implies F_{yy}(1,1) = -2. \end{aligned}$$

Derivando $(*)$ di nuovo, si ottiene

$$0 = F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, y)f'(x) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + F_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = 1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, si ottiene $f''(0) = 3$. Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

(2) Introduciamo $F(x, y) = y \sin x + xe^y - \pi$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(\pi, 0) = 0$ e $F_x(x, y) = y \cos x + e^y$, $F_y(x, y) = \sin x + xe^y$ e quindi $F_y(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(\pi) = 0$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0, \tag{$*$}$$

che, calcolata in $x = \pi$, fornisce $F_x(\pi, 0) + F_y(\pi, 0)f'(\pi) = 0$, da cui segue $f'(\pi) = -\frac{F_x(\pi,0)}{F_y(\pi,0)} = -\frac{1}{\pi}$. L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = \pi$ è data da $y = f'(\pi)(x - \pi) = 1 - \frac{x}{\pi}$. Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned}
&F_{xx}(x, y) = -y \sin x \implies F_{xx}(\pi, 0) = 0, \\
&F_{xy}(x, y) = \cos x + e^y \implies F_{xy}(\pi, 0) = 0, \\
&F_{yy}(x, y) = xe^y \implies F_{yy}(\pi, 0) = \pi.
\end{aligned}$$

Derivando $(*)$ di nuovo, si ottiene

$$0 = F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, y)f'(x) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + F_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = \pi$, $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = -\frac{1}{\pi}$, si ottiene $f''(\pi) = -\frac{1}{\pi^2}$. Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = -\frac{1}{\pi}(x - \pi) - \frac{1}{2\pi^2}(x - \pi)^2.$$

(3) Introduciamo $F(x, y) = xe^y + y \sin(x - 1) - 2x - 4y + 1$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1, 0) = 0$ e $F_x(x, y) = e^y + y \cos(x - 1) - 2$, $F_y(x, y) = xe^y + \sin(x - 1) - 4$ e quindi $F_y(1, 0) = -3 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 0$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0, \tag{$*$}$$

che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1, 0) + F_y(1, 0)f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1,0)}{F_y(1,0)} = -\frac{1}{3}$. L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = f'(1)(x - 1) = -\frac{1}{3}(x - 1)$. Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned}
&F_{xx}(x, y) = -y \sin(x - 1) \implies F_{xx}(1, 0) = 0, \\
&F_{xy}(x, y) = \cos(x - 1) + e^y \implies F_{xy}(1, 0) = 2, \\
&F_{yy}(x, y) = xe^y \implies F_{yy}(1, 0) = 1.
\end{aligned}$$

Derivando $(*)$ di nuovo, si ottiene

$$0 = F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, y)f'(x) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + F_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = 1$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -\frac{1}{3}$, si ottiene $f''(1) = -\frac{11}{27}$. Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = -\frac{1}{3}(x-1) - \frac{11}{54}(x-1)^2.$$

(4) Introduciamo $F(x, y) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + e^{xy-1} - 2$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0$, e osserviamo che $F(-1, -1) = 0$ e $F_x(x, y) = \frac{4}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + ye^{xy-1}$, $F_y(x, y) = -\frac{4}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + xe^{xy-1}$ e quindi $F_y(-1, -1) = -3 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(-1) = -1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0, \qquad (*)$$

che, calcolata in $x = -1$, fornisce $F_x(-1, -1) + F_y(-1, -1)f'(-1) = 0$, da cui segue $f'(-1) = -\frac{F_x(-1,-1)}{F_y(-1,-1)} = \frac{2+\pi}{2-\pi}$.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = -1$ è data da $y = -1 + f'(-1)(x+1) = \frac{2+\pi}{2-\pi}x + \frac{2\pi}{2-\pi}$. Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned}
F_{xx}(x, y) &= y^2e^{xy-1} - \frac{8xy}{\pi(x^2+y^2)^2} \implies F_{xx}(-1, -1) = 1 - \frac{2}{\pi},\\
F_{xy}(x, y) &= (xy+1)e^{xy-1} + \frac{4(x^2-y^2)}{\pi(x^2+y^2)^2} \implies F_{xy}(-1, -1) = 2,\\
F_{yy}(x, y) &= x^2e^{xy-1} + \frac{8xy}{\pi(x^2+y^2)^2} \implies F_{yy}(-1, -1) = 1 + \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Derivando $(*)$ di nuovo, si ottiene

$$0 = F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, y)f'(x) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + F_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = -1$, $f(-1) = -1$, $f'(-1) = \frac{2+\pi}{2-\pi}$, si ottiene $f''(-1) = \frac{2\pi(\pi^2-20)}{(\pi-2)^3}$. Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = \frac{2+\pi}{2-\pi}(x+1) + \frac{\pi(\pi^2-20)}{(\pi-2)^3}(x+1)^2.$$

(5) Introduciamo $F(x, y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{6} - \log 2$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$, e osserviamo che $F(\sqrt{3}, 1) = 0$ e $F_x(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_y(x, y) = \frac{y-x}{x^2+y^2}$ e quindi $F_y(\sqrt{3}, 1) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(\sqrt{3}) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0, \qquad (*)$$

che, calcolata in $x = \sqrt{3}$, fornisce $F_x(\sqrt{3}, 1) + F_y(\sqrt{3}, 1)f'(\sqrt{3}) = 0$, da cui segue $f'(\sqrt{3}) = -\frac{F_x(\sqrt{3},1)}{F_y(\sqrt{3},1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = \sqrt{3}$ è data da $y = 1 + f'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})x - 2(\sqrt{3} + 1)$. Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned}
F_{xx}(x, y) &= \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \implies F_{xx}(\sqrt{3}, 1) = -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}),\\
F_{xy}(x, y) &= \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \implies F_{xy}(\sqrt{3}, 1) = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{3}),\\
F_{yy}(x, y) &= \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \implies F_{yy}(\sqrt{3}, 1) = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Derivando $(*)$ di nuovo, si ottiene

$$0 = F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, y)f'(x) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + F_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = \sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 1$, $f'(\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$, si ottiene $f''(\sqrt{3}) = 10 + 6\sqrt{3}$. Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = 1 + (2 + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + (5 + 3\sqrt{3})(x - \sqrt{3})^2.$$

(6) Introduciamo $F(x, y) = x^2y + 2xy^2 - \int_1^x e^{x^2t^2}\,dt - 3$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1, 1) = 0$ e $F_x(x, y) = 2xy+2y^2-e^{x^4}-\int_1^x 2xt^2e^{x^2t^2}\,dt$, $F_y(x, y) = x^2+4xy$ e quindi $F_y(1, 1) = 5 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0, \qquad (*)$$

che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1, 1)+F_y(1, 1)f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = \frac{1}{5}(e-4)$. L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = 1 + f'(1)(x - 1) = 1 + \frac{1}{5}(e - 4)(x - 1)$. Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned}
&F_{xx}(x, y) = 2y - 6x^3e^{x^4} - \int_1^x 2t^2(1 + 2x^2t^2)e^{x^2t^2}\,dt \implies F_{xx}(1, 1) = 2 - 6e,\\
&F_{xy}(x, y) = 2x + 4y \implies F_{xy}(1, 1) = 6,\\
&F_{yy}(x, y) = 4x \implies F_{yy}(1, 1) = 4.
\end{aligned}$$

Derivando $(*)$ di nuovo, si ottiene

$$0 = F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, y)f'(x) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + F_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = 1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{5}(e - 4)$, si ottiene $f''(1) = \frac{2}{125}(63 + 61e - 2e^2)$. Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{5}(e - 4)(x - 1) + \frac{1}{125}(63 + 61e - 2e^2)(x - 1)^2.$$

(7) Introduciamo $F(x, y) = y\sin(\pi x) + \int_1^{y^2} \operatorname{arctg}(xt)\,dt$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1, 1) = 0$ e $F_x(x, y) = \pi y\cos(\pi x) + \int_1^{y^2} \frac{t}{1+x^2t^2}\,dt$, $F_y(x, y) = \sin(\pi x) + 2y \operatorname{arctg}(xy^2)$ e quindi

$F_y(1,1) = \frac{\pi}{2} \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0, e un'unica funzione $y = f(x) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0, \tag{$*$}$$

che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1,1) + F_y(1,1)f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = 2$. L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = 1+f'(1)(x-1) = 1+2(x-1) = 2x-1$. Osserviamo, inoltre, che

$$\begin{aligned} F_{xx}(x,y) &= -\pi^2 y \sin(\pi x) - \int_1^{y^2} \frac{2xt^3}{(1+x^2t^2)^2}\,dt \implies F_{xx}(1,1) = 0, \\ F_{xy}(x,y) &= \pi\cos(\pi x) + \frac{2y^3}{1+x^2y^4} \implies F_{xy}(1,1) = 1-\pi, \\ F_{yy}(x,y) &= 2\operatorname{arctg}(xy^2) + \frac{4xy^2}{1+x^2y^4} \implies F_{yy}(1,1) = \frac{\pi}{2} + 2. \end{aligned}$$

Derivando $(*)$ di nuovo, si ottiene

$$0 = F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x,y)f'(x) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + F_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = 1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, si ottiene $f''(1) = \frac{4}{\pi}(\pi - 6)$. Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{2}{\pi}(\pi - 6)(x-1)^2.$$

□

Svolgimento esercizio 7

(1) Introduciamo $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 1$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(3,-1,1) = 0$ e $F_x(x,y,z) = 2x-2$, $F_y(x,y,z) = 2y+2$, e $F_z(x,y,z) = 2z-4$ e quindi $F_z(3,-1,1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0, y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione $z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(3,-1) = 1$ e $F(x,y,f(x,y)) = 0$, per ogni $(x,y) \in U$.
Derivando quest'ultima rispetto ad x e y, si ottiene $\begin{cases} F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0, \\ F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0, \end{cases}$
che, calcolate in $(x,y) = (3,-1)$, forniscono $\begin{cases} F_x(3,-1,1) + F_z(3,-1,1)f_x(3,-1) = 0, \\ F_y(3,-1,1) + F_z(3,-1,1)f_y(3,-1) = 0, \end{cases}$
da cui segue $f_x(3,-1) = -\frac{F_x(3,-1,1)}{F_z(3,-1,1)} = 2$, $f_y(3,-1) = -\frac{F_y(3,-1,1)}{F_z(3,-1,1)} = 0$.
L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (3,-1)$ è data da $z = f(3,-1) + f_x(3,-1)(x-3) + f_y(3,-1)(y+1) = 2x-5$.

(2) Introduciamo $F(x,y,z) = xyz - 6$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(1,-2,-3) = 0$ e $F_x(x,y,z) = 2x-2$, $F_y(x,y,z) = 2y+2$, e $F_z(x,y,z) = 2z-4$ e quindi $F_z(1,-2,-3) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0, y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione

$z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1,-2) = -3$ e $F(x,y,f(x,y)) = 0$, per ogni $(x,y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y, si ottiene $\begin{cases} F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0, \\ F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0, \end{cases}$

che, calcolate in $(x,y) = (1,-2)$, forniscono $\begin{cases} F_x(1,-2,-3) + F_z(1,-2,-3)f_x(1,-2) = 0, \\ F_y(1,-2,-3) + F_z(1,-2,-3)f_y(1,-2) = 0, \end{cases}$

da cui segue $f_x(3,-1) = -\frac{F_x(1,-2,-3)}{F_z(1,-2,-3)} = 3$, $f_y(3,-1) = -\frac{F_y(1,-2,-3)}{F_z(1,-2,-3)} = -\frac{3}{2}$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0,y_0) = (1,-2)$ è data da $z = f(1,-2) + f_x(1,-2)(x-1) + f_y(1,-2)(y+2) = 3x - \frac{3}{2}y - 9$.

(3) Introduciamo $F(x,y,z) = xy+yz+zx-3$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(1,1,1) = 0$ e $F_x(x,y,z) = y+z$, $F_y(x,y,z) = x+z$, e $F_z(x,y,z) = y+x$ e quindi $F_z(1,1,1) = 2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0,y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione $z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1,1) = 1$ e $F(x,y,f(x,y)) = 0$, per ogni $(x,y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y, si ottiene $\begin{cases} F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0, \\ F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0, \end{cases}$

che, calcolate in $(x,y) = (1,1)$, forniscono $\begin{cases} F_x(1,1,1) + F_z(1,1,1)f_x(1,1) = 0, \\ F_y(1,1,1) + F_z(1,1,1)f_y(1,1) = 0, \end{cases}$

da cui segue $f_x(1,1) = -\frac{F_x(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -1$, $f_y(1,1) = -\frac{F_y(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -1$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0,y_0) = (1,1)$ è data da $z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) = 3 - x - y$.

(4) Introduciamo $F(x,y,z) = \int_1^z \sin(x^2t^2)\,dt + x^2y + y^2 - z^2$. Poiché $F(0,1,1) = 0$ e $F_z(0,1,1) = \sin(x^2z^2) - 2z\big|_{(0,1,1)} = -2 \neq 0$, per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno U di (x_0,y_0), un intorno V di z_0, e un'unica funzione $z = f(x,y) : U \to V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(0,1) = 1$, e $F(x,y,f(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in U$, cioè

$$\int_1^{f(x,y)} \sin(x^2t^2)\,dt + x^2y + y^2 - f(x,y)^2 = 0.$$

Le derivate parziali prime sono

$$\begin{cases} \sin\left(x^2 f(x,y)^2\right) f_x(x,y) + \int_1^{f(x,y)} 2x\cos(x^2t^2)\,dt + 2xy - 2f(x,y)f_x(x,y) = 0, \\ \sin\left(x^2 f(x,y)^2\right) f_y(x,y) + x^2 + 2y - 2f(x,y)f_y(x,y) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $(0,1)$, forniscono

$$\begin{cases} -2f_x(0,1) = 0 \implies f_x(0,1) = 0, \\ 2 - 2f_y(0,1) = 0 \implies f_y(0,1) = 1. \end{cases}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0,y_0) = (0,1)$ è data da $z = f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) = y$.

□

Svolgimento esercizio 8

(1) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 1] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) & = 2x = 0 \\ g_y(x, y) & = 2y = 0 \\ g(x, y) & = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

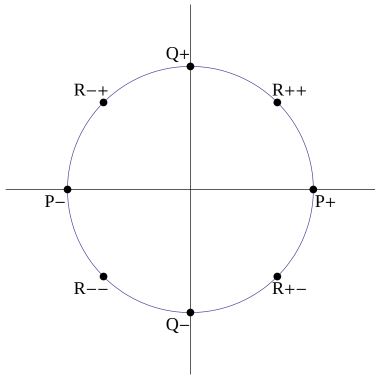

Figura 1: Dominio per l'esercizio 8 (1)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) & = 4x^3 + 2x\lambda = 2x(2x^2 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) & = 4y^3 + 2y\lambda = 2y(2y^2 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) & = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} 2x^2 + \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2x^2 + \lambda = 0 & (*) \\ 2y^2 + \lambda = 0 & (**) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo; nel quarto sistema sottraiamo l'equazione $(**)$ dall'equazione $(*)$, ottenendo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cioè i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$, $Q_\pm = (\pm 1, 0)$, e i quattro punti $R_{\pm,\pm} = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_\pm) = f(Q_\pm) = 1$ e $f(R_{\pm,\pm}) = \frac{1}{2}$. Quindi $\min_D f = \frac{1}{2}$ e $\max_D f = 1$.

(2) Poiché $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{2}\big(-x \pm \sqrt{4 - 3x^2}\big)$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di x su $[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 2]. Poiché f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) &= 2x + y = 0 \\ g_y(x,y) &= 2y + x = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 + xy - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

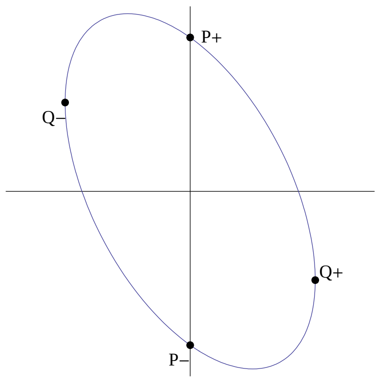

Figura 2: Dominio per l'esercizio 8 (2)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= y + \lambda(2x + y) = 2\lambda x + (\lambda + 1)y = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + \lambda(2y + x) = (\lambda + 1)(x + 2y) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = -2y \\ (1 - 3\lambda)y = 0 \\ 3y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$; il secondo i punti $Q_\pm = (\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}})$.
Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_\pm) = 1$ e $f(Q_\pm) = -\frac{1}{3}$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{3}$ e $\max_D f = 1$.

(3) Poiché $x^2 + y^4 - y = 0 \iff x = \pm\sqrt{y - y^4}$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di y su $[0, 1]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 3]. Poiché f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^4 - y$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) & = 2x = 0 \\ g_y(x, y) & = 4y^3 - 1 = 0 \\ g(x, y) & = x^2 + y^4 - y = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

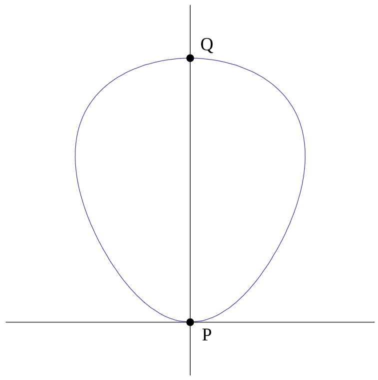

Figura 3: Dominio per l'esercizio 8 (3)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) & = 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) & = 2y + \lambda(4y^3 - 1) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) & = x^2 + y^4 - y = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 2y + \lambda(4y^3 - 1) = 0 \\ y(y^3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce il punto $P = (0, 0)$; il secondo fornisce i punti P, e $Q = (0, 1)$.
Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P) = 0$ e $f(Q) = 1$. Quindi $\min_D f = 0$ e $\max_D f = 1$.

(4) Poiché $x^4 + y^4 - 1 = 0 \iff y = \pm\sqrt[4]{1 - x^4}$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di x su $[-1, 1]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 4]. Poiché f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione

di vincolo $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) & = 4x^3 = 0 \\ g_y(x,y) & = 4y^3 = 0 \\ g(x,y) & = x^4 + y^4 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

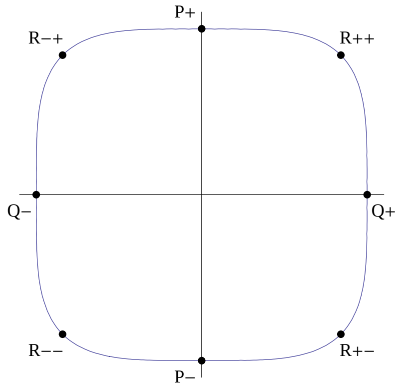

Figura 4: Dominio per l'esercizio 8 (4)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + 4\lambda x^3 = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\big(2\lambda x^2(x^2+y^2) - 1\big) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 4\lambda y^3 = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\big(2\lambda y^2(x^2+y^2) - 1\big) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 2\lambda y^2(x^2+y^2) - 1 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} 2\lambda x^2(x^2+y^2) - 1 = 0 \\ y = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2\lambda x^2(x^2+y^2) - 1 = 0 & (*) \\ 2\lambda y^2(x^2+y^2) - 1 = 0 & (**) \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo; il secondo fornisce i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$; il terzo i punti $Q_\pm = (\pm 1, 0)$. Dal quarto, sottraendo l'equazione $(**)$ da $(*)$, e osservando che deve essere $\lambda \neq 0$, si ottiene $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^4 + y^4 = 1, \end{cases}$ che fornisce i quattro punti $R_{\pm,\pm} = (\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$.

Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_\pm) = f(Q_\pm) = 1$ e $f(R_{\pm,\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi $\min_D f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\max_D f = 1$.

(5) Poiché $xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$, D è il grafico della funzione continua $x \in (0, +\infty) \to \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$, e quindi D è chiuso ma non limitato [vedi figura 5], e quindi, anche se f è continua su D, non si può applicare il teorema di Weierstrass, per cui nessuno ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Ma osserviamo che f su D si può scrivere $g(x) := f(x, \frac{1}{x}) = \exp\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)$, $x \in (0, +\infty)$. Questa

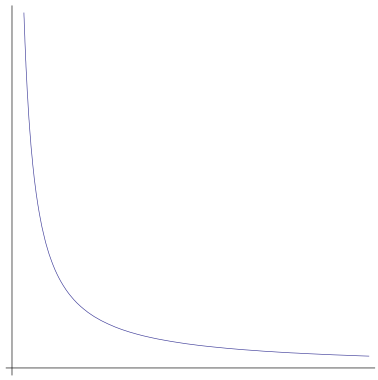

Figura 5: Dominio per l'esercizio 8 (5)

funzione ha $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, e $g'(x) = \frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2} \exp\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right) \geq 0 \iff x \in (0, 1]$, per cui g è crescente in $(0, 1]$, e decrescente in $[1, +\infty)$, e quindi ha massimo assoluto in $x = 1$. Quindi $\min_D f = \nexists$, $\inf_D f = 1$, e $\max_D f = f(1, 1) = \sqrt{e}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 9

(1) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 6] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

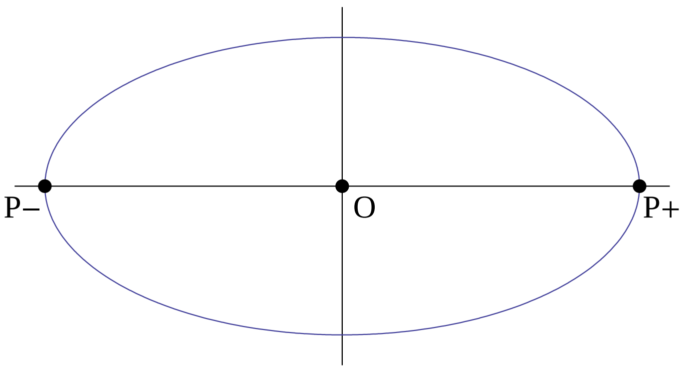

Figura 6: Dominio per l'esercizio 9 (1)

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 2y^2 = 0 \\ f_y(x, y) = 4xy - 2y = 2y(2x - 1) = 0, \end{cases}$$

che fornisce il punto $O = (0, 0)$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$].

Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 8y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) &= 3x^2 + 2y^2 + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) &= 4xy - 2y + 8y\lambda = 2y(2x - 1 + 4\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che implica

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \bigvee \begin{cases} 2x - 1 + 4\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{4}(1 - 2x) \\ 3x^2 + 7y^2 + \frac{1}{2}x(1 - 2x) = \frac{1}{2}(4x^2 + 4y^2 + x) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce i punti $P_\pm = (\pm 2, 0)$, mentre il secondo implica

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + x = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + x + 4 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O) = 3$, $f(P_+) = 11$, $f(P_-) = -5$. Quindi $\min_D f = -5$ e $\max_D f = 11$.

(2) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 7] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 + 12xy^2 - 64x = 4x(x^2 + 3y^2 - 16) = 0 \\ f_y(x, y) = 12x^2y + 4y^3 - 64y = 4y(3x^2 + y^2 - 16) = 0, \end{cases}$$

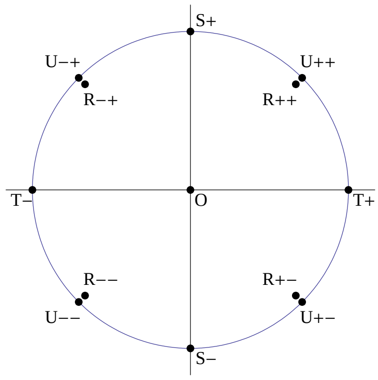

Figura 7: Dominio per l'esercizio 9 (2)

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0, \end{cases}$$

che forniscono i punti $O = (0,0)$, $P_\pm = (0, \pm 4)$, $Q_\pm = (\pm 4, 0)$, $R_{\pm,\pm} = (\pm 2, \pm 2)$, dei quali solo O e $R_{\pm,\pm}$ sono interni a D.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$].

Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2x = 0 \\ g_y(x,y) = 2y = 0 \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 4x^3 + 12xy^2 - 64x + 2x\lambda = 2x(2x^2 + 6y^2 - 32 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 12x^2y + 4y^3 - 64y + 2y\lambda = 2y(6x^2 + 2y^2 - 32 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x=0 \\ 6x^2+2y^2-32+\lambda=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} 2x^2+6y^2-32+\lambda=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2x^2+6y^2-32+\lambda=0(*) \\ 6x^2+2y^2-32+\lambda=0(**) \\ x^2+y^2-9=0. \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo; il secondo fornisce i punti $S_\pm=(0,\pm 3)$; il terzo fornisce i punti $T_\pm=(\pm 3,0)$. Il quarto sistema, dopo aver sottratto l'equazione $(**)$ da $(*)$, implica

$$\begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2+y^2-9=0, \end{cases}$$

che fornisce i quattro punti $U_{\pm,\pm}=\big(\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\big)$.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O)=0$, $f(R_{\pm,\pm})=-128$, $f(S_\pm)=f(T_\pm)=-207$, $f(U_{\pm,\pm})=-126$. Quindi $\min_D f=-207$ e $\max_D f=0$.

(3) Poiché D è chiuso e limitato [perché è una corona circolare] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y)\in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}=0 \\ f_y(x,y)=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}=0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y=0 \\ x^2-3y^2=0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} y^2-3x^2=0 \\ x=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y^2-3x^2=0 \\ x^2-3y^2=0. \end{cases}$$

I quattro sistemi forniscono il solo punto $O=(0,0)\notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Poiché $\mathcal{F}D$ è l'unione di due circonferenze, possiamo parametrizzarle ponendo $\begin{cases} x=r\cos\vartheta, \\ y=r\sin\vartheta, \end{cases}$ $\vartheta\in[0,2\pi]$, $r\in\{1,2\}$. Otteniamo così le funzioni $g_1(\vartheta):=f(\cos\vartheta,\sin\vartheta)=2\cos\vartheta\sin\vartheta=\sin 2\vartheta$, e $g_2(\vartheta):=f(2\cos\vartheta,2\sin\vartheta)=\frac{1}{2}\cos\vartheta\sin\vartheta=\frac{1}{4}\sin 2\vartheta$, $\vartheta\in[0,2\pi]$. Allora, $\min g_1=-1$, $\max g_1=1$, $\min g_2=-\frac{1}{4}$, $\max g_2=\frac{1}{4}$.

(d) Quindi, $\min_D f = -1$, $\max_D f = 1$.

(4) Poiché D è chiuso e limitato [perché è un quadrato] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2(x + 1)e^{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0 \\ f_y(x, y) = 2(y - 1)e^{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0, \end{cases}$$

che fornisce il punto $(-1, 1) \notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Parametrizziamo, separatamente, i quattro segmenti di retta che compongono $\mathcal{F}D$, indicando con $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (0, 1)$, $V_3 = (0, 0)$, $V_4 = (1, 0)$ i vertici del quadrato D.

Il segmento V_1V_2 ha equazioni parametriche $x = t, y = 1$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_1(t) = f(t, 1) = e^{(t+1)^2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_1'(t) = 2(t + 1)e^{(t+1)^2} = 0 \iff t = -1$, si ottengono i punti V_1, V_2.

Il segmento V_2V_3 ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_2(t) = f(0, t) = e^{t^2-2t+2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_2'(t) = 2(t - 1)e^{t^2-2t+2} = 0 \iff t = 1$, si ottengono i punti V_2, V_3.

Il segmento V_3V_4 ha equazioni parametriche $x = t, y = 0$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_3(t) = f(t, 0) = e^{t^2+2t+2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_3'(t) = 2(t+1)e^{t^2+2t+2} = 0 \iff t = -1$, si ottengono i punti V_3, V_4.

Il segmento V_1V_4 ha equazioni parametriche $x = 1, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_4(t) = f(1, t) = e^{t^2-2t+5}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_4'(t) = 2(t - 1)e^{t^2-2t+5} = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_1, V_4.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = e^4$, $f(V_2) = e$, $f(V_3) = e^2$, $f(V_4) = e^5$. Quindi $\min_D f = e$, e $\max_D f = e^5$.

(5) Poiché D è chiuso e limitato [perché è un triangolo] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 96x^3 - 2(x - y) = 0 \\ f_y(x, y) = 12y^3 - 2(y - x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 96x^3 + 12y^3 = 0 \\ 12y^3 - 2y + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ -48x^3 + 6x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0) \notin D^o$, e $\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Parametrizziamo, separatamente, i tre segmenti di retta che compongono $\mathcal{F}D$, indicando con $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (0, 1)$, $V_3 = (0, 0)$ i vertici del triangolo D.

Il segmento V_1V_2 ha equazioni parametriche $x = t, y = 1$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_1(t) = f(t, 1) = 24t^4 - t^2 + 2t + 2$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_1'(t) = 96t^3 - 2t + 2 = 96t^3 + 2(1 - t) \geq 0$, per ogni $t \in [0, 1]$, si ottengono i punti V_1, V_2.

Il segmento V_2V_3 ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_2(t) = f(0, t) = 3t^4 - t^2$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_2'(t) = 12t^3 - 2t = 0 \iff t = 0 \vee t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, si ottengono i punti V_2, V_3, e $P = \big(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\big)$.

Il segmento V_3V_1 ha equazioni parametriche $x = t, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_3(t) = f(t, t) = 27t^4$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_3'(t) = 108t^3 = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_3, V_1.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = 27$, $f(V_2) = 2$, $f(V_3) = 0$, $f(P) = -\frac{1}{12}$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{12}$, e $\max_D f = 27$.

(6) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 8] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

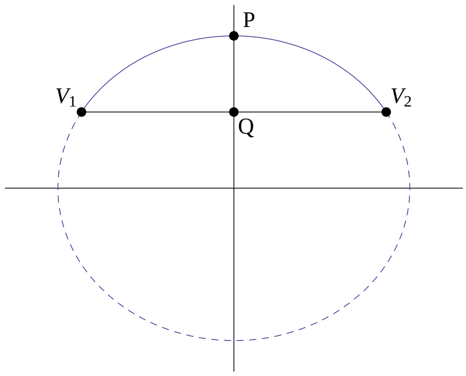

Figura 8: Dominio per l'esercizio 9 (6)

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} - x = x(2e^{x^2+y^2} - 1) = 0 \\ f_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} - 2y = 2y(e^{x^2+y^2} - 1) = 0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

L'unico sistema che ammette soluzione è il primo, che fornisce il punto $O = (0, 0) \notin D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. La frontiera $\mathcal{F}D$ è unione di un arco di ellisse $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 = 4, y \geq \frac{1}{2}\}$, e del segmento di retta $\ell := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}, x \in [-1, 1]\}$, che si incontrano nei punti $V_1 = (-1, \frac{1}{2})$, e $V_2 = (1, \frac{1}{2})$. Allora, impieghiamo due metodi diversi: per trattare l'insieme E, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_E$]; per trattare l'insieme ℓ, usiamo il metodo di parametrizzazione.

Cominciamo dall'insieme E. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 4$, $y \geq \frac{1}{2}$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 6x = 0 \\ g_y(x,y) = 8y = 0 \\ g(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 2xe^{x^2+y^2} - x + 6\lambda x = x(2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 2ye^{x^2+y^2} - 2y + 8\lambda y = 2y(e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda = 0 \\ y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il primo, il terzo e il quarto sistema sono assurdi; il secondo fornisce il punto $P = (0,1)$.

Consideriamo, ora, il segmento ℓ. Esso ha equazioni parametriche $x = t, y = \frac{1}{2}$, con $t \in [-1,1]$. Si ha $h(t) = f(t, \frac{1}{2}) = e^{t^2+1/4} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}$, per $t \in [-1,1]$. Poiché $h'(t) = 2te^{t^2+1/4} - t = t(2e^{t^2+1/4} - 1) = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_1, V_2, e $Q = (0, \frac{1}{2})$.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = f(V_2) = e - \frac{1}{2}$, $f(P) = e - 1$, $f(Q) = e^{1/4} - \frac{1}{4}$. Quindi $\min_D f = e^{1/4} - \frac{1}{4}$ e $\max_D f = e - \frac{1}{2}$.

(7) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 9] e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2(x-y) = 0 \\ f_y(x,y) = 2(y-x) = 0, \end{cases}$$

che fornisce il segmento di retta $\ell := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)\} \subset D^o$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non esistono.

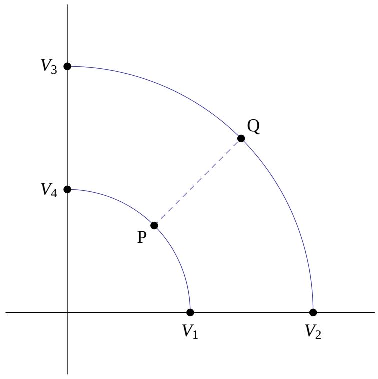

Figura 9: Dominio per l'esercizio 9 (7)

(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. La frontiera $\mathcal{F}D$ è unione di due archi di circonferenza $C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ e $C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, e di due segmenti di retta $\ell_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [0, 1]\}$ e $\ell_y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0, 1]\}$, che si incontrano nei punti $V_1 = (1, 0)$, $V_2 = (2, 0)$, $V_3 = (0, 2)$, $V_4 = (0, 1)$, e che dovremo considerare quali possibili punti di massimo o minimo. Allora, impieghiamo due metodi diversi: per trattare gli insiemi C_1 e C_2, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana; per trattare gli insiemi ℓ_x e ℓ_y, usiamo il metodo di parametrizzazione.

Cominciamo dall'insieme C_1. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 2y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) & = 2(x - y) + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) & = 2(y - x) + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) & = x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda + 1)x = y \\ \lambda(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x^2 = \frac{1}{2}, x \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = -x \\ (\lambda + 1)x = -x \\ x^2 = \frac{1}{2}, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è assurdo; il primo fornisce il punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \overline{\ell}$.

Continuiamo con l'insieme C_2. Introduciamo la funzione di vincolo $h(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $x \geq 0$,

$y \geq 0$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} h_x(x,y) = 2x = 0 \\ h_y(x,y) = 2y = 0 \\ h(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 2(x-y) + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = 2(y-x) + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda+1)x = y \\ \lambda(x+y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x^2 = 2, x \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = -x \\ (\lambda+1)x = -x \\ x^2 = 2, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è assurdo; il primo fornisce il punto $Q = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \in \overline{\ell}$.

Consideriamo, ora, il segmento ℓ_x. Esso ha equazioni parametriche $x = t, y = 0$, con $t \in [1,2]$. Si ha $j(t) = f(t,0) = t^2$, per $t \in [1,2]$. Poiché $j'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$, non si ottengono ulteriori punti.

Consideriamo, infine, il segmento ℓ_y. Esso ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [1,2]$. Si ha $k(t) = f(0,t) = t^2$, per $t \in [1,2]$. Poiché $k'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$, non si ottengono ulteriori punti.

(*d*) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = f(V_4) = 1$, $f(V_2) = f(V_3) = 4$, $f|_{\overline{\ell}} = 0$. Quindi $\min_D f = 0$ e $\max_D f = 4$.

□