Esempi di Domande per l'orale scritto - Ingegneria Gestionale - A.A. 2022-23

Serie numeriche e di potenze

- Dimostrare che la serie armonica è divergente.
- Mostrare, con dimostrazioni e controesempi, la relazione trà convergenza assoluta e semplice di una serie.
- Dimostrare il criterio di Leibniz
- Dimostrare il criterio del rapporto o della radice.
- Dimostrare che se una serie di potenze converge in punto differente dal centro della serie allora converge assolutamente in un intorno del centro.

Differenziabilità

1. Dimostrare che una funzione differenziabile è derivabile e continua. Mostrare, controesempi, che il viceversa non è vero.
2. Dimostrare che il gradiente di una funzione differenziabile in un punto individua la direzione ed il verso di massima crescenza della funzione nel punto.
3. Mostrare la relazione tra derivata direzionale e gradiente per una funzione differenziabile.
4. Provare che se il gradiente di una funzione differenziabile si annulla in un aperto connesso allora la funzione è costante nell'aperto connesso.
5. Esempio di funzione differenziabile in punto con derivate parziali non continue nel punto.
6. Definizione di diffeomorfismo e provare che la matrice Jacobiana di un diffeomorsmo è invertibile.
7. Provare che il gradiente (se non nullo) di una funzione classe C^1 è ortogonale alle curve di livello della funzione.
8. Definizione di matrice Hessiana per una funzione di classe C^2 e provare che si tratta di una matrice simmetrica.
9. Provare, per una funzione di classe C^2, che se la matrice Hessiana è definita positiva/negativa in un punto critico della funzione allora si tratta di un minimo/massimo relativo.
10. Provare che una funzione di classe C^2 è convessa se e solo se la matrice Hessiana è semidefinita positiva.
11. Enunciare e dimostrare il Teorema del differenziale Totale (in 2-d).
12. Enunciare e dimostrare il Teorema delle funzioni implicite 2-d (teorema di Dini).

Curve e superfici

- Mostrare la relazione trè i vettori normali di due superfici equivalenti e provare che hanno la stessa area.
- Descrivere la forma parametrica della curva definita al grafico di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dare il vettore tangente e la formula della lunghezza.

- Data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ di componenti $(0, \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ descrivere la forma parametrica della superficie di rotazione intorno all'asse z definita da γ. Scrivere i vettori tangenti, il vettore normale e la formula dell'area.
- Data una funzione $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ descrivere la forma parametrica della superficie definita dal grafico di f. Scrivere i vettori tangenti, il vettore normale e la formula dell'area.

Forme Differenziali

- Provare che l'integrale di una forma differenziale su due curve equivalenti è uguale.
- Provare che la primitiva funzione di una forma differenziale in un aperto connesso è unica a meno di una costante.
- Enunciare e provare il teorema sulle tre nozioni equivalenti di forma differenziale esatta su un aperto conesso.
- Provare che una forma esatta di classe C^1 è chiusa. Dare un esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta.
- Provare che un insieme convesso è semplicemente connesso. Discutere la relazione opposta con degli esempi.
- Enunciare e dimostrare il lemma di Poincaré (caso C^2).

Integrali multipli e di superficie

- Provare che il grafico di una funzione continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$.
- Provare che una funzione definita su un rettangolo di $\mathbb{R}^2$ è integrabile se l'insieme dei punti di discontinuità ha misura di Peano-Jordan nulla.
- Dare, in $\mathbb{R}^2$, un esempio di insieme non misurabile secondo Peano-Jordan e un esampio di funzione non integrabile secondo Riemann.
- Provare che il flusso di una campo vettoriale attraverso due superfici equivalenti è uguale a meno di un segno.