Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 26 Giugno 2017

Cognome e Nome:
Matricola:
Crediti:
Orale, I/II Appello:

1) Data la funzione

$$f(x) := x^2 + y^2 + x^2y + y^3$$

1. Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.
2. Determinari estremi della funzione nella regione $E := \{y^2 + x^2 \leq 1\}$.

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2xzy^2}{x^2+1}\, dx \ + \ 2yz\ln(x^2+1)\, dy \ + \ y^2\ln(x^2+1)\, dz$$

a) Dire se la forma è chiusa ed esatta. In caso affermativo calcolarne una primitiva.

b) Calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1} \omega$ e $\int_{\gamma_2} \omega$ dove γ_1 è il segmento che va dal punto $(0,1,0)$ al punto $(1,1,1)$ mentre γ_2 è la curva $\gamma_2(t) := e^{t(1-t)} \cdot (1-t,\ 1,\ 1-t)$ per $t \in [0,1]$.

3) Si consideri la superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 + 4y^2 = 1\ ,\ y \geq 0\}$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} := (zx^2, x^2, z^2)$ attraverso la superficie S orientata in modo che la seconda componenete del vettore normale sia positiva.

4) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right)\, (x-4)^k\ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

5) Si consideri l'equaione differenziale

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin(t)$$

a) Trovare la soluzione generale dell'equazione e risolvere il problema di Cauchy condato iniziale $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

b) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin(t) + 1$

Analisi II - Ingegneria Energetica-Meccanica - 9 Luglio 2018
Esame scritto

Cognome e Nome:
Matricola:
Crediti:

1) Data la funzione
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^4y^2 - 7$$

a) Studiare l'esistenza e la natura degli estremi liberi della funzione.

b) Trovare il massimo ed il mnimo assoluto della funzione nella regione
$$K := \{0 \le x \le y \ , \ 0 \le y \le 1\}$$

2) Data la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^2 e^x}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq 0 \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Studiare al variare di $\alpha \ge 0$ la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

b) Calcolare per $\alpha = 0$ le derivate direzionali nel punto $(x,y) = (1,0)$.

3) Data la forma differenziale
$$\omega := \frac{1+xy^2}{x}\,dx + \frac{2xy^2 - 1}{y}\,dy$$

a) Studiare la chiusura e l'esattezza di ω. Nel caso in cui la forma risulti esatta calcolarne una primitiva.

b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ la spezzata $(1,-1) \to (2,-1) \to (2,-2)$.

4) Calcolare l'integrale
$$\int_D \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dxdy$$
dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \ , \ 0 \le y \le x \ , \ 0 \le x \le 1\}$

5) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\dddot{x} + 3\ddot{x} - 4\dot{x} = t \ ,$$
e risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -3/16$, $\ddot{x}(0) = -1/8$.

Analisi II - Ingegneria Energetica-Meccanica - 15 Febbbario 2018
Esame scritto

Cognome e Nome:
Matricola:

1) Sia data la funzione
$$f(x,y) = x^4 - xy^2 + y^2 - 9$$

a) Determinare classificare gli estremi liberi della funzione.

b) Calcolare, motivandone l'esistenza, massimi e minimi assoluti della funzione nella regione $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \ , \ y \leq 1\}$.

2) Data la forma differenziale
$$\omega := \frac{2y}{y^2+x^2}\,dx + \left(\frac{-2x}{y^2+x^2} + x\right)\,dy$$
calcolare l'integrale di ω lungo l'ellisse γ di equazione $(x+1)^2 + 2y^2 = 4$ percorsa una volta in senso antiorario.

3) Calcolare il seguente integrale improprio
$$\int_A \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy$$
dove $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq x+2 \ , \ 4-x \leq y\}$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^2y^2, x^2, 0)$ attraverso la superficie S definita dalle equazioni $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1 \ , \ 0 \leq z \leq 2y+3\}$ orientata in modo tale che nel punto $(0,1,0)$ il vettore normale abbia seconda componente positiva.

5) Dato il sistema di equazioni differenziale
$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$
Trovare la soluzione generale del sistema e del problema di Cauchy con dato iniziale $\vec{x}(0) = (1,0)$

Analisi II - Ingegneria Energetica-Meccanica - 21 Giugno 2018
Esame scritto

Cognome e Nome:
Matricola:
Crediti:

1) Data la funzione
$$f(x,y) = \left((x-y)^2 + y^4\right)^\alpha \ , \qquad \alpha > 0 \ .$$

a) Determinare al variare del parametro $\alpha > 0$ il dominio di definizione di f.

b) Studiare al variare di $\alpha > 0$ la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f nel dominio di definizione.

c) Calcolare per $\alpha = 1/2$ l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$.

2) Data la forma differenziale
$$\omega := \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}}\, dx + \frac{-1/2}{(x^2-y)^{2/3}}\, dy$$

a) Studiare la chiusura e l'esattezza di ω. Nel caso in cui la forma risulti esatta calcolarne una primitiva.

b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva definita dall'equazione $y = e^x + 1$ per $x \in [0,1]$

3) Calcolare l'ntegrale
$$\int_V (x^2(1+y^{1/3}) + y^2)\, dxdydz$$
dove $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1\}$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x,y,0)$ attraverso la superficie $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \ , \ 0 \leq z\right\}$ orientata in modo che la terza componente del vettore normale sia negativa. Calcolare, inoltre, il volume dell'insieme $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \ , \ 0 \leq z\right\}$

5) Data l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^{2t} + \sin(t)$$

Trovare la soluzione generale dell'equazione e risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale $\dot{x}(0) = x(0) = 0$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 26 Giugno 2017

1) Data la funzione

$$f(x) := x^2 + y^2 + x^2y + y^3$$

1. *Determinare e classificare gli estremi liberi della funzione.*
2. *Determinari estremi della funzione nella regione* $E := \{y^2 + x^2 \leq 1\}$.

Svolgimento 1.) Si tratta di una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi possiamo applicare tutti i risultati che conosciamo per l'analisi dei punti estremali. Imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x + 2xy \\ 2y + x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(1+y) \\ 2y + x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

Dalla prima equazione otteniamo come soluzioni $x = 0$ e $y = -1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda si ottiene:

$$2y + 3y^2 = 0 \iff y(2+3y) = 0 \iff y = 0 \ , \ y = -2/3$$

Quindi abbiamo i seguenti punti critici

$$(0,0) \quad , \quad (0, -2/3)$$

Sostituento $y = -1$ nella seconda equazione si ottiene $-2 + x^2 + 3 = 0$ che non ammette soluzione. Quindi gli unici punti critici della funzione sono quelli sopra indicati. Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2+6y \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad H_f(0,-2/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $(0,0)$ **è un minimo relativo** in quanto gli autovalori della matrice sono positivi mentre il punto $(0,-2/3)$ è un **punto di sella** in quanto la matrice Hessiana ha due autovalori di segno opposto quindi non è definita.

2.) L'insieme E è chiuso e limitato ed f è chiaramente continua. Per il teorema di Weierstrass f avrà nell'insieme E massimo e minimo assoluto E. Dobbiamo solo studiare il comportamento f sulla frontiera ∂E di E in quanto abbiamo già osservato che f nella parte interna di E ha solo un minimo relativo nel punto $(0,0)$.

Possiamo applicare due metodi. **Moltiplicatori di Lagrange**. Cominciamo osservando che il vincolo $\partial E := \{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ è regolare in quanto il gradiente della funzione $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ non si annulla mai su ∂E. Definiamo la funzione di Lagrange

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) := x^2 + y^2 + x^2y + y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

ed imponiamo l'annullamento del gradiente di $\mathscr{L}$:

$$\nabla \mathscr{L} = \begin{pmatrix} 2x + 2xy - 2\lambda x \\ 2y + x^2 + 3y^2 - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x(1+y-\lambda) \\ 2y + x^2 + 3y^2 - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ e $y = \lambda - 1$. Sostituendo $x = 0$ nella terza equazioni si ottiene $y = \pm 1$. Sostituendo nella seconda equazione si ha

$$2 + 3 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 5/2 \quad , \quad -2 + 3 + 2\lambda = 0 \iff \lambda = -1/2$$

Quindi i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$ sono punti critici della funzione sul vincolo.

Imponiamo ora l'altra soluzione della prima equazione:$y = \lambda - 1$. Sostituendola nella seconda equazione si ha

$$2(\lambda - 1) + x^2 + 3(\lambda - 1)^2 - 2\lambda(\lambda - 1) = 0 \iff x^2 = (\lambda - 1)(-2 - 3(\lambda - 1) + 2\lambda) = -(\lambda - 1)^2$$

che ammette come unica possibile soluzione $\lambda = 1$ e $x = 0$. Da cui si deduce che $y = 0$ ma questa soluzione non è compatibile con il vincolo (terza equazione) $x^2 + y^2 = 1$. Quindi gli unici punti critici sul vincolo sono i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$. In conclusione per determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione su E calcoliamo la funzione in $(0, 0)$ e nei punti critici di f su ∂E appena trovati:

$$f(0, 0) = 0 \quad , \quad f(0, 1) = 2 \quad , \quad f(0, -1) = 0$$

Quindi $(0, 1)$ **è un punto di max assoluto** mentre i punti $(0, 0)$ **e** $(0, -1)$ **sono di minimo assoluto**.

Secondo metodo (più veloce). Si osservi che la funzione $f(x)$ ristretta al vincolo diventa

$$g(y) := f_{\restriction \partial E}(y) = (y + 1) \ , \qquad -1 \leq y \leq 1$$

Chiaramente $y+1$ è strettamente crescente quindi ha minimo e massimo negli estremi dell'intervallo di definizione $y = -1$, $y = 1$ rispettivamente, cui corrispondono, i punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$ sul ∂E. Da qui in poi l'esercizio prosegue come prima.

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2xzy^2}{x^2+1}\,dx \;+\; 2yz\ln(x^2+1)\,dy \;+\; y^2\ln(x^2+1)\,dz$$

a) Dire se la forma è chiusa ed in caso affermativo calcolarne una primitiva.

b) Calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1}\omega$ e $\int_{\gamma_2}\omega$ dove γ_1 è il segmento che va dal punto $(0,1,0)$ al punto $(1,1,1)$ mentre γ_2 è la curva $\gamma_2(t) := e^{t(1-t)}\cdot(1-t,\,1,\,1-t)$ per $t\in[0,1]$.

Svolgimento a) Si tratta di una forma differenziale di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. La forma differenziale risulta chiusa infatti

$$\partial_y a_1 = \partial_y \frac{2xzy^2}{x^2+1} = \frac{4xzy}{x^2+1} = \partial_x 2yz\ln(x^2+1) = \partial_y a_2$$

$$\partial_z a_1 = \partial_z \frac{2xzy^2}{x^2+1} = \frac{2xy^2}{x^2+1} = \partial_x y^2\ln(x^2+1) = \partial_x a_3$$

$$\partial_z a_2 = \partial_z 2yz\ln(x^2+1) = 2y\ln(x^2+1) = \partial_y y^2\ln(x^2+1) = \partial_y a_3$$

Dal momento che il dominio di definizione $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso la forma differenziale è esatta. Calcoliamo una primitiva f impondendo che $df=\omega$:

$$\partial_x f = \frac{2xzy^2}{x^2+1} \;\Rightarrow\; f(x,y,z) = \int \frac{2xzy^2}{x^2+1}\,dx + h(y,z) \;\Rightarrow\; f(x,y,z) = zy^2\ln(x^2+1) + h(y,z)$$

Quindi

$$\partial_y f = 2zy\ln(x^2+1) + \partial_y h = a_2 = 2yz\ln(x^2+1) \;\Rightarrow\; \partial_y h(y,z) = 0 \iff h(y,z) = g(z)$$

Infine

$$\partial_z f = y^2\ln(x^2+1) + \partial_z g = a_3 = y^2\ln(x^2+1) \;\Rightarrow\; \partial_z g(z) = 0 \iff g(z) = costante$$

Quindi la funzione

$$\boxed{f = zy^2\ln(x^2+1)}$$

è una primitiva di ω.

b) Per calcolare gli integrali curvilinei è a questo punto sufficiente valutare la primitiva sugli estremi delle due curve:

$$\int_{\gamma_1}\omega = f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0)) = f(1,1,1) - f(0,1,0) = \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

Mentre

$$\int_{\gamma_2}\omega = f(\gamma_2(1)) - f(\gamma_2(0)) = f(0,1,0) - f(1,1,1) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$$

3) Si consideri la superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2+4y^2 = 1\ ,\ y \geq 0\}$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} := (zx^2, x^2, z^2)$ attraverso la superficie S orientata in modo che la seconda componenete del vettore normale sia positiva.

Svolgimento Vogliamo applicare il teorema della divergenza. A tal proposito consideriamo la superficie chiusa

$$\Sigma := D \cup S \quad , \quad D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2+z^2 \leq 1\ ,\ y=0\}$$

ottenuta undendo ad S il disco D ed il cui vettore normale è

$$\vec{N}_\Sigma(x,y,z) = \begin{cases} \vec{N}_D(x,y,z) & (x,y,z)z \in D \\ \vec{N}_S(x,y,z) & (x,y,z)z \in S \end{cases}$$

Il teorema della divergenza afferma che

$$\int_{V(\Sigma)} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz = \int_\Sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\Sigma \right\rangle = \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle + \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle$$

dove $\vec{N}_\Sigma$, quindi $\vec{N}_D$ e $\vec{N}_S$, deve essere orientato in nel verso uscente dalla superficie, mentre $V(\Sigma) = \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2+z^2+4y^2 \leq 1\ ,\ 0 \leq y\}$. Si osservi che la divergenza del campo

$$\mathrm{div}\vec{F} = 2xz + 2z$$

è una funzione dispari rispetto allo scambio $z \to -z$ e che il dominio di integrazione $V(\Sigma)$ risulta simmetrico rispetto allo scambio $z \to -z$. Di conseguenza

$$\int_{V(\Sigma)} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz = 0 = \int_\Sigma \left\langle \vec{F}, \vec{N}_\Sigma \right\rangle = \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle + \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle$$

e

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle = -\int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle$$

Quindi per calcolare il flusso di $\vec{F}$ attraverso S sarà sufficiente calcolare il flusso del campo attraverso il disco D (con gli orientamenti giusti). Scriviamo D in forma parametrica

$$D = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ ,\ 0 \leq x^2+y^2 \leq 1$$

i vettori tangenti saranno $\partial_x D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\partial_z D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vettore normale (orientato in modo tale che N_D ed N_S escano dalla superficie $\Sigma = D \cup S$ è

$$\vec{N}_D = \partial_x D \wedge \partial_z D = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda N_S si osservi che l'orientamento richieto dal problema (seconda componente positiva) è tale che N_D ed N_S escono dalla superficie. Quindi

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_S \right\rangle = -\int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_D \right\rangle - \int_{0 \leq x^2+z^2 \leq 1} -x^2 dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^3 \cos^2(\theta) = \frac{\pi}{4}$$

4) Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right) (x-4)^k \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta ed uniforme.

Svolgimento Si tratta di una serie di pontenze centrata in $x = 4$. Si osservi che per $k \to \infty$ si ha

$$a_k := \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right) = e^k \left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right) = \frac{e^k}{k}(1 + o(1))$$

da cui segue facilmente il raggio di convergenza

$$\frac{1}{r} = \lim_k \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right)^{1/k} = \lim_k \left(\frac{e^k}{k}(1+o(1))\right)^{1/k} = \lim_k e \left(\frac{1}{k}(1+o(1))\right)^{1/k} = e$$

Quindi il raggio di convergenza è $\boxed{r = 1/e}$ e la serie converge semplicemente ed assolutamente in $(4 - 1/e, 4 + 1/e)$ e uniformemente in ogni $[a, b] \subset (4 - 1/e, 4 + 1/e)$.

Dallo sviluppo asintotico di a_k si vede facilmente che la serie **non converge** in $\boxed{x = 4 + 1/e}$. Si noti infatti che per $x = 4 + 1/e$ usando lo sviluppo asintotico fatto all'inizio si ha

$$a_k \cdot (4 + 1/e - 4)^k = \frac{e^k}{k}(1 + o(1))\frac{1}{e^k} = \frac{1}{k}(1 + o(1)) \ ,$$

che si comporta come alla serie armonica. Quindi per confronto asintotico la serie non converge in $x = 4 + 1/e$.

Per $x = 4 - 1/e$ invece si ha:

$$a_k \cdot (4 - 1/e - 4)^k = (-1)^k \frac{1}{e^k} \left(e^{k+\frac{1}{k}} - e^k\right) = (-1)^k (e^{1/k} - 1)$$

si tratta di una serie a termini di segno alterno. Posto $f(k) := (e^{1/k} - 1)$ si vede che $f(k) \to 0$ per $k \to +\infty$. Inoltre

$$f'(k) = -\frac{e^{1/k}}{k^2}$$

ossia $f(k)$ è decrescente,quindi per **Leibniz la serie converge per** $x = 4 - 1/e$.

5) Si consideri l'equaione differenziale

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin(t)$$

a) Trovare la soluzione generale dell'equazione e risolvere il problema di Cauchy condato iniziale $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

b) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin(t) + 1$

Svolgimento a.) Il polinomio caratteristico associato all'equazione ha le seguenti radici

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \iff \lambda = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 + i, -2 - i$$

Quindi la soluzione dell'omogenea è

$$x_o(t) = Ae^{-2t}\sin(t) + Be^{-2t}\cos(t)$$

Per calcolare una soluzione particolare procediamo per similitudine osservando che i non è radice del polinomio caratteristico; cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo

$$y(t) = K_1 \sin(t) + K_2 \cos(t).$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= \ddot{y} + 4\dot{y} + 5y \\
&= -K_1 \sin(t) - K_2 \cos(t) + 4K_1 \cos(t) - 4K_2 \sin(t) + 5K_1 \sin(t) + 5K_2 \cos(t) \\
&= \sin(t)(-K_1 - 4K_2 + 5K_1) + \cos(t)(-K_2 + 4K_1 + 5K_2) \\
&= \sin(t)(-4K_2 + 4K_1) + \cos(t)(4K_1 + 4K_2)
\end{aligned}$$

da cui

$$4K_1 - 4K_2 = 1 \ , \ 4K_1 + 4K_2 = 0 \iff K_2 = -K_1 \ , \ K_1 = 1/8 \ , \ K_2 = -1/8$$

Quindi la soluzione particolare è $y(t) = 1/8(\sin(t) - \cos(t))$ e la soluzione generale è

$$x_{Gen}(t) = x_o(t) + y(t) = Ae^{-2t}\sin(t) + Be^{-2t}\cos(t) + 1/8(\sin(t) - \cos(t))$$

Infine la soluzione del problema di Cauchy si ottiene imponento

$$x_{Gen}(0) = 0 = B - 1/8 \ \Rightarrow \ B = 1/8$$

mentre

$$\dot{x}_{Gen}(t) = -2Ae^{-2t}\sin(t) + Ae^{-2t}\cos(t) - 2Be^{-2t}\cos(t) - Be^{-2t}\sin(t) + 1/8(\cos(t) + \sin(t))$$

quindi

$$\dot{x}_{Gen}(0) = A - 2B + 1/8 = A - 1/8 = 0 \iff A = 1/8$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x_{Cauchy}(t) = 1/8(e^{-2t}\sin(t) + e^{-2t}\cos(t) + \sin(t) - \cos(t))$$

b) Per calcolare la soluzione generale nel caso in cui il temine noto sia $\sin(t) + 1$ sfruttiamo la linearità dell'equazione: la soluzione particolare con termine noto $\sin(t) + 1$ si ottiene dalla somma della soluzione particolare con termine noto $\sin(t)$ (che già conosciamo) più la soluzione particolare con termine noto $f(t) = 1$. Quest'ultima la cerchiamo della forma $\tilde{y}(t) = K$ in quanto 0 non è radice del polinomio caratteristico: Sostituento $\tilde{y}$ nell'equazione si ottiene $K = 1/5$. Quindi la soluzione generale con termine noto $\sin(t) + 1$ è la funzione

$$\tilde{x}_{Gen}(t) = Ae^{-2t}\sin(t) + Be^{-2t}\cos(t) + 1/8(\sin(t) - \cos(t)) + 1/5$$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 7 Lulgio 2018

1) *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^4y^2 - 7$$

a) Studiare l'esistenza e la natura degli estremi liberi della funzione.

b) Trovare il massimo ed il mnimo assoluto della funzione nella regione

$$K := \{0 \le x \le y \ , \ 0 \le y \le 1\}$$

Svolgimento. a) La funzione è di classe C^∞. Troviamo i punti critici imponendo l'annullamento del gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x^3y^2 \\ 4y^3 - 2x^4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3(1-y^2) \\ 2y(2y^2 - x^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La prima equazione ha soluzioni $x = 0$ e $y = \pm 1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda otteniamo $y = 0$. Mentre sostituendo $y = \pm 1$ nella seconda otteniamo $x = \pm\sqrt[4]{2}$. Quindi abbiamo cinque punti critici:

$$(0,0) \quad , \quad (\pm\sqrt[4]{2}, 1) \quad , \quad (\pm\sqrt[4]{2}, -1) \ .$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2(1-y^2) & -8x^3y \\ -8x^3y & 12y^2 - 2x^4 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(\pm\sqrt[4]{2}, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 8(2)^{3/4} \\ \pm 8(2)^{3/4} & 12 - 4 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(\pm\sqrt[4]{2}, \pm 1) = -64(2)^{3/2}$$

da cui segue che is quattro punti $(\pm\sqrt[4]{2}, 1)$, $(\pm\sqrt[4]{2}, -1)$ **sono punti di sella**. Mentre

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Per vedere se si tratta di una punto di minimo o di sella si osservi che

$$f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - x^4y^2 = x^4(1-y^2) + y^4 \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4(1-y^2) \ge -y^4$$

e questo è verificato se $|y| < 1$. Ossia $f(x,y) - f(0,0) \ge 0$ nella striscia $|y| < 1$ che contiene l'origine. Quindi $(0,0)$ **è un minimo relativo**.

b) Il vincolo è un insieme chiuso e limitato. Per il teorema Weierstrass la funzione a max e min assoluto in K. Nella parte interna di K abbiamo già studiato la funzione e visto che non ci sono estremi liberi ($(0,0)$ cade sulla frontiera di K). Studiamo la funzione sulla frontiera. La frontiera ∂K di K è formata dall'unione di due curve $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ dove

$$\gamma_1 = \{y = 1 \ , \ 0 \le x \le 1\} \quad , \quad \gamma_2 = \{x = 0 \ , \ 0 \le y \le 1\} \quad , \quad \gamma_3 = \{y = x \ , \ 0 \le x \le 1\} \ .$$

Ora la restrizione della funzione sulla prima curva è costante

$$f \restriction \gamma_1 = f(x,1) = -6 \ , \ x \in [-1,1] \ .$$

Mentre

$$f \upharpoonright \gamma_2 = f(0,y) = y^4 - 7 \ , \ y \in [0,1]$$

che per $y \in [0,1]$ è strettamente crescente. Quindi ha un minimo in $y = 0$ e un max per $y = 1$ corrispondenti ai punti $(0,0)$ e $(0,1)$. Infine

$$f \upharpoonright \gamma_3 = f(x,x) = 2x^4 - x^6 - 7 \ , \ x \in [0,1]$$

si osservi che

$$f'(x,x) = 8x^3 - 6x^5 = 2x^3(4 - 3x^2) > 0 \quad , \quad \forall x \in [0.1]$$

Quindi $x = 0$ e $x = 1$ sono il minimo ed il max assoluto della funzione lungo γ_3 corrispondenti ai punti $(0,0)$ e $(1,1)$. In conclusione si vede che il punto $(0,0)$ é il **minimo assoluto** della funzione nel vincolo K e in particolare $f(0,0) = -7$. Mentre i punti $(x,1)$, per $x \in [0,1]$ sono **massimi assoluti** della funzione sul vincolo e $f(x,1) = -6$. $\square$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^2 e^x}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq 0 \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Studiare al variare di $\alpha \geq 0$ la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

b) Calcolare per $\alpha = 0$ le derivate direzionali nel punto $(x,y) = (1,0)$.

Svolgimento. *a*) Per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione é di classe C^∞ indipendentemente dal parametro α in quanto composizione e rapporto di funzioni C^∞. Quindi l'unico punto in cui studiare la funzione è l'origine.

Continuità - Conviene riscrivere la funzione in coordinate polari in quanto al denominatore è presente una potenza della distanza dall'origine:

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^2 e^x}{(x^2+y^2)^\alpha} \overset{coo.pol.}{=} \frac{\rho^2(\rho^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})}{\rho^{2\alpha}} = \rho^{2(1-\alpha)}(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})$$

da cui si deduce che la **funzione è continua in** $(0,0)$ **per** $\alpha < 1$. Infatti per tali valori di α per $(x,y) \to (0,0)$ si ha

$$|f(x,y)| = |\rho^{2(1-\alpha)}(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})| \leq \rho^{2(1-\alpha)}(\rho^2 + e^\rho) \overset{\rho\to 0}{\to} 0$$

uniformemente in θ. Per $\alpha \geq 1$ il limite non esiste e quindi la funzione non è continua. Ad esempio per $\alpha = 1$ si osservi che

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = 0 \quad , \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2} = 1$$

quindi il limite non esiste.

Derivabilità - Studiamo l'esistenza delle derivate parziali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^{2\alpha}x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{4-2\alpha}}{x} = \begin{cases} 0 & \alpha < 3/2 \\ \nexists & \alpha \geq 3/2 \end{cases}$$

Quindi la derivata parziale in $(0,0)$ rispetto alla x esiste ed è uguale a 0 se $\alpha < 3/2$. Mentre

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^{2\alpha}y} = \lim_{y\to 0}\frac{|y|^{2-2\alpha}}{y} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1/2 \\ \nexists & \alpha \geq 1/2 \end{cases}$$

Quindi la derivata parziale in $(0,0)$ rispetto alla y esiste ed è uguale a 0 se $\alpha < 1/2$. In conclusione f **è derivabile in** $(0,0)$ **per** $\alpha < 1/2$ **e** $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Derivabilità - Studiamo la differenziabilità per $\alpha < 1/2$:

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x^4 + y^2 e^x}{(x^2+y^2)^{\alpha+1/2}} \overset{coo.pol.}{=} \frac{\rho^2(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})}{\rho^{2\alpha+1}}$$
$$= \rho^{1-2\alpha}(\rho^2\cos^4\theta + \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta})$$

che tende a 0 uniformemente in θ se e solo se $\alpha < 1/2$. Quindi in conclusione f **è differenziabile in** $(0,0)$ **se e solo se** $\alpha < 0$.

b) Abbiamo osservato che per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è differenziabile quindi $D_{\vec{v}}f(1,0) = \langle \nabla f(1,0), \vec{v} \rangle$. Ora per $\alpha = 0$ si ha

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^2 e^x \\ 2ye^x \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$D_{\vec{v}}f(1,0) = 4v_1$$

$\square$

3) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{1+xy^2}{x}\,dx + \frac{2xy^2-1}{y}\,dy$$

a) Studiare la chiusura e l'esattezza di ω. Nel caso in cui la forma risulti esatta calcolarne una primitiva.

b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ la spezzata $(1,-1) \to (2,-1) \to (2,-2)$.

Svolgimento. Il dominio di ω

$$D_\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;|x \neq 0 \text{ } o \text{ } y \neq 0\}$$

è formato da quttro componenti connesse, la parte interna dei quattro quadranti, ognuna delle quali è semplicemente connessa. Quindi il dominio, seppur non connesso, è un indieme semplicemente connesso. La forma differenziale è chiusa

$$\partial_x a_2 = \partial_x \frac{2xy^2-1}{y} = 2y = \partial_y \frac{1+xy^2}{x} = \partial_y a_1 \ ,$$

quindi, essendo il dominio semplicemente connesso, è anche esatta. Calcoliamo una primitiva f:

$$\partial_x f(x,y) = a_1(x,y) = \frac{1+xy^2}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int \frac{1+xy^2}{x} dx \ + \ h(y) = \ln|x| + xy^2 + h(y)$$

Per determinare h imponiamo la seconda equazione su f

$$2xy + \partial_y h(y) = \partial_y f(x,y) = a_2(x,y) = \frac{2xy^2-1}{y} = 2xy - \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \partial_y h(y) = -\frac{1}{y}$$

ossia

$$h(y) = -\int \frac{1}{y} + cost = -\ln|y| + cost$$

Scegliendo, per semplicità, $cost = 0$ otteniamo la primitiva

$$\boxed{f(x,y) = \ln\frac{|x|}{|y|} + xy^2}$$

b) Si ossevi che il sostegno della curva γ si trova nella quarto quadrante $(x > 0, y < 0)$. L'integrale è dato da

$$\int_\gamma \omega = f(2,-2) - f(1,-1) = 8 - 1 = 7$$

□

4) Calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2\ ,\ 0\le y\le x\ ,\ 0\le x\le 1\}$

Svolgimento. Per descrivere l'insieme e la funzione integranda conviene passare in coordinate polari. Per quanto riguarda l'insieme D ponendo $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\sin\theta$ si ha

$$1\le\rho^2\quad,\quad 0\le\cos\theta\le\sin\theta\quad,\quad \rho\cos\theta\le 1\ .$$

La seconda condizione implica che $\theta\in[0,\pi/4]$ mentre la terza e la prima condizione implicano $1\le\rho\le 1/\cos\theta$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos\theta} d\rho\rho\left(\cos^2\theta+1\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\right)_1^{1/\cos\theta}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta(1-\cos^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}-1)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta(-\cos^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta})\\
&= \frac{1}{2}\tan\theta\Big|_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\Big|_0^{\pi/4}\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)=\frac{6-\pi}{16}
\end{aligned}$$

$\square$

5) *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$\dddot{x} + 3\ddot{x} - 4\dot{x} = t \ ,$$

e risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $x(0) = 0$*,* $\dot{x}(0) = -3/16$*,* $\ddot{x}(0) = -1/8$*.*

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale lineare e del terzo ordine. Risolviamo l'omogenea: le radici del polinomio caratteristico sono

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0 \quad , \quad \lambda = 0, 1, -4 \ .$$

quindi

$$\boxed{x_{om}(t) = A + Be^t + Ce^{-4t}}$$

Consideriamo il termine noto $f(t) = t$. Osservando che 0 è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea cerchiamo una soluzione della forma $y(t) = t(K + Ht)$. Sostituendo nell'equazione si ha :

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} - 4\dot{y} = t \iff 6H - 4(K + 2Ht) = 6H - 4K - 8Ht = t$$

Quindi $H = -1/8$ e $K = -3/16$. Quindi lasoluzione particolare sarà $y(t) = -\frac{t}{16}(3 + 2t)$ e la soluzione generale

$$\boxed{x_{Gen}(t) = A + Be^t + Ce^{-4t} - \frac{t}{16}(3 + 2t)}$$

Imponiamo il problema di Cauchy

$x_{Gen}(0) = 0 = A+B+C$, $\dot{x}_{Gen}(0) = -3/16 = B-4C-3/16$, $\ddot{x}_{Gen}(0) = -1/8 = B+16C-1/4$

da cui $C = 1/160$, $B = 1/40$, $A = -5/160$ e

$$\boxed{x_{Cauchy}(t) = \frac{1}{160}(-5 + 4e^t + 1e^{-4t}) - \frac{t}{16}(3 + 2t)}$$

$\square$

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 15 Febbraio 2018

1) *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = x^4 - xy^2 + y^2 - 9$$

a) Determinare classificare gli estremi liberi della funzione.

b) Calcolare, motivandone l'esistenza, massimi e minimi assoluti della funzione nella regione $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \ , \ y \leq 1\}$.

Svolgimento. a) La funzione f, essendo un polinomio, è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamo gli estremi liberi imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - y^2 \\ -2xy + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - y^2 \\ 2y(-x+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dalla seconda equazione si ha $y = 0$ e $x = 1$. Sostituendo $y = 0$ nella prima otteniamo $x = 0$. Mentre sostituendo $x = 1$ nella prima otteniamo $y = \pm 2$. Quindi abbiamo tre punti critici:

$$(0,0) \quad , \quad (1, \pm 2) \ .$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2y \\ -2y & -2x+2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(1,\pm 2) = \begin{pmatrix} 12 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(H_f(1,\pm 2) = -16$$

da cui segue che $(1, \pm 2)$ **sono punti di sella**. Mentre

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è semi-definita positiva. Per vedere se si tratta di una punto di minimo o di sella si osservi che

$$f(x,y) - f(0,0) = x^4 - xy^2 + y^2 = x^4 + y^2(1-x) \geq 0 \iff y^2(1-x) \geq -x^4$$

e questo è banalmente vero se $1 - x > 0 \iff x < 1$. Ossia $f(x,y) - f(0,0) \geq 0$ nel semipiano $x < 1$ che contiene l'origine. Quindi $(0,0)$ **è un minimo relativo**.

b) Il vincolo è un insieme chiuso e limitato. Per il teorema Weierstrass la funzione a max e min assoluto in Z. Nella parte interna di Z abbiamo già studiato la funzione e visto che non ci sono estremi liberi ($(0,0)$ cade sulla frontiera di Z). Studiamo la funzione sulla frontiera. La frontiera ∂Z di Z è formata dall'unione di due curve $\partial Z = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$$\gamma_1 = \{y = x^2 \ , \ -1 \leq x \leq 1\} \quad , \quad \gamma_2 = \{y = 1 \ , \ -1 \leq x \leq 1\}$$

e dai punti non regolari $(-1,1)$ e $(1,1)$ in cui si intersecano le due curve. Ora

$$f \restriction \gamma_1 = f(x,x^2) = x^4 - x^5 + x^4 - 9 = 2x^4 - x^5 + 9 \ , \ x \in [-1,1]$$

la cui derivata

$$f'(x,x^2) = -5x^4 + 8x^3 = x^3(-5x+8) > 0 \iff x \in (0, 8/5)$$

Osservando che $8/5 > 1$, si ha che $f(x, x^2)$ ha un minimo relativo in $x = 0$ corrispondente al punto $(0, 0)$. Mentre

$$f \restriction \gamma_2 = f(x, 1) = x^4 - x - 8 \ , \ x \in [-1, 1]$$

si osservi che

$$f'(x, 1) = 4x^3 - 1 > 0 \iff x > 1/4^{1/3}$$

Quindi il punto $(x, y) = (1/4^{1/3}, 1)$ è un minimo relativo della funzione ristretta a γ_2. Infine confrontando i punti trovati sulla parte regolare della frontiera con i valori che assume la funzione sui punti in cui il vincolo è non regolare $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ si ha

$$f(-1, 1) = -6 \quad , \quad f(1, 1) = -8 \quad , \quad f(0, 0) = -9 \quad , \quad f(1/4^{1/3}, 1) = -\frac{3}{4^{4/3}} - 8$$

ossia $(0, 0)$ **è il minimo assoluto e** $(-1, 1)$ **è il massimo assoluto**.

□

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{2y}{y^2+x^2}\,dx + \left(\frac{-2x}{y^2+x^2} + x\right)\,dy$$

calcolare l'integrale di ω lungo l'ellisse γ di equazione $(x+1)^2 + 2y^2 = 4$ percorsa una volta in senso antiorario.

Svolgimento. La forma differenziale è definita nell'insieme $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La forma si decompone

$$\omega = -2\omega_{ang} + \omega'$$

dove ω_{ang} è la funzione angolo $\omega_{ang} = \frac{-y}{y^2+x^2}\,dx + \frac{x}{y^2+x^2}\,dy$ e $\omega' = xdy$. Dato che l'ellisse γ contiene l'origine ed è percosa in senso antiorario si ha

$$\int_\gamma \omega_{ang} = 2\pi$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, si osservi che ω' non è chiusa quindi va integrata direttamente sulla curva. Parametrizzando l'ellisse in coordinate ellittiche $x+1 = \rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta$ si ha: $\rho = 2$ e

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 1+2\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \dot\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega' = \int_\gamma xdy = \int_0^{2\pi} d\theta(1+2\cos\theta)\sqrt{2}\cos\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta\cos^2\theta = 2\sqrt{2}\pi$$

In conclusione

$$\int_\gamma \omega = -2\int_\gamma \omega_{ang} + \int_\gamma \omega' = -4\pi + 2\sqrt{2}\pi = 2\pi(\sqrt{2}-2)$$

$\square$

3) Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_A \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy$$

dove $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le x+2\ ,\ 4-x \le y\}$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in quando il dominio di integrazione non è limitato. La funzione nel dominio di integrazione è ben definita e continua. Per calcolare l'integrale si consideri la succesione

$$A_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le x+2\ ,\ 4-x \le y \le n-x\}$$

con $n \ge 4$ e si osservi che

$$\bigcup_{n=4}^{\infty} A_n = A\ ,\ A_n \subset A_{n+1}\ ,\forall n \ge 4$$

e che ogni A_n è misurabile (la frontiera è una curva regolare a tratti) e di misura finita. Inoltre la funzione all'interno del dominio di integrazione è maggiore o uguale a 0. Ora per calcolare l'integrale

$$\int_{A_n} \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy$$

eseguiamo il cambio di variabili

$$u := y-x\ ,\ w := y+x\ ,\ 0 \le u \le 2\ ,\ 4 \le w \le n\ .$$

da cui invertendo si ottiene

$$y = \frac{u+w}{2}\ ,\ x = \frac{w-u}{2}\ ,\ J(u,w) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J(u,w) = -1/2\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{A_n} \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy &= \int_0^2 du \int_4^n dw\, \frac{1}{2}\, \frac{e^u}{(w+1)(w-1)}\,dudv \\
&= \frac{e^2-1}{2}\int_4^n dw \frac{1}{(w+1)(w-1)}\,dudv = \frac{e^2-1}{4}\int_4^n dw \left(\frac{-1}{w+1} + \frac{1}{w-1}\right) dudv \\
&= \frac{e^2-1}{4} \ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right|_4^n = \frac{e^2-1}{4}\left(\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$\int_A \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy = \lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} \frac{e^{y-x}}{(y+x+1)(y+x-1)}\,dxdy = \frac{e^2-1}{4}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$\square$

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^2y^2, x^2, 0)$ attraverso la superficie S definita dalle equazioni $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1 \ , \ 0 \le z \le 2y+3\}$ orientata in modo tale che nel punto $(0,1,0)$ il vettore normale abbia seconda componente positiva.

Svolgimento. La superficie è invariante per lo scambio $x \to -x$ mentre la divergenza del campo $\mathrm{div}(\vec{F}) = 2xy^2$ è una funzione dispari nella variabile x. Quindi conviene applicare il teorema della divergenza per calcolare il flusso attraverso S. Chiudiamo la superficie S con i dischi

$$D_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2y+3 \ , \ x^2+y^2 \le 1\}$$

e

$$D_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2+y^2 \le 1 \ , \ z = 0\}$$

In forma parametrica si ha

$$D_1(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 2s+3 \end{pmatrix} \quad , \quad t^2+s^2 \le 1 \quad ; \quad D_2(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t^2+s^2 \le 1$$

i vettori tangenti sono $\partial_t D_1 = (1,0,0)$ e $\partial_s D_1 = (0,1,2)$ e $\partial_t D_2 = (1,0,0)$ e $\partial_s D_2 = (0,1,0)$. Mentre

$$\partial_t D_1 \wedge \partial_s D_1 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \partial_t D_2 \wedge \partial_s D_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per applicare il teorema della divergenza orientiamo la superficie chiusa $\tilde{S} = S \cup D_1 \cup D_2$ con versore normale uscente. Quindi l'orientamento su D_1 è esattamente quello ottenuto dal prodotto vettoriale mentre quello su D_0 è opposto a quello ottenuto dal prodotto vettoriale

$$\vec{N}^+_{D_1}(t,s) = \partial_t D_1 \wedge \partial_s D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{N}^+_{D_2}(t,s) = \partial_t D_2 \wedge \partial_s D_2 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi per il teorema della divergenza

$$0 = \int_{int\tilde{S}} \mathrm{div}\vec{F} = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_S \right\rangle + \int_{D_1} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_1} \right\rangle + \int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle$$

quindi

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_S \right\rangle = -\int_{D_1} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_1} \right\rangle - \int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle \ .$$

dove $int\tilde{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2y+3 \ , \ x^2+y^2 \le 1\}$. Ora si osservi che $\int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle = 0$ mentre

$$\int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_D \right\rangle = \int_{t^2+s^2 \le 1} (-2)t^2 \, dtds = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 d\theta d\rho \rho^3 \cos^2\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

dove si è eseguito il cambio di variabili in coordinate polari $t = \rho\cos\theta$, $s = \rho\sin\theta$. Infine l'orientamento richiesto dal problema su S è uguale a quello uscente dalla superficie $\tilde{S}$. Quindi in conclusione

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_S \right\rangle = -\int_{D_1} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_1} \right\rangle - \int_{D_2} \left\langle \vec{F}, \vec{N}^+_{D_2} \right\rangle = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

5) Dato il sistema di equazioni differenziale

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare la soluzione generale del sistema e del problema di Cauchy con dato iniziale $\vec{x}(0) = (1, 0)$.

Svolgimento. Autovalori della matrice che definisce il sistema

$$0 = det(A - \lambda) = (5 - \lambda)(1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \iff \lambda = 3 \ .$$

Quindi $\lambda = 3$ è autovalore di A con molteplicità due. Gli autovettori sono dati dalla relazione

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - 3)\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ 4a - b \end{pmatrix}$$

da cui si vede che l'autospazio è di dimensione 1 e possiamo scegliere come autovettore

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Quindi la molteplicità geometrica è 1. Cerchiamo un autovettore generalizzato imponendo

$$(A - 3)\vec{v} = \vec{v}_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a - b \\ 4a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$b = 2a - 1 \ \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + av_1 \ .$$

dato che $\vec{v}_1$ è nel nucleo di $(A - 3)$ possiamo scegliere come autovettore generalizzato

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

La generica soluzione $\vec{x}_{gen}(t)$ dell'equazione si ottiene dalla matrice esponenziale imponendo

$$\vec{x}_{Gen}(t) = e^{3t}\, e^{(A-3)t}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = e^{3t}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + bt(A - 3)\vec{v}_2) = e^{3t}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + bt\vec{v}_1) \ .$$

Risolviamo infine il problema di Cauchy:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - b \end{pmatrix} \iff a = 1 \ , \ b = 2$$

Quindi

$$\vec{x}_{Cauchy}(t) = e^{3t}(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 2t\vec{v}_1)$$

□

Analisi Matematica II - Ingegneria Meccanica/Energetica - 21 Giugno 2018

1) *Data la funzione*

$$f(x,y) = \left((x-y)^2 + y^4\right)^\alpha \ , \qquad \alpha > 0 \ .$$

a) Determinare al variare del parametro $\alpha > 0$ il dominio di definizione di f.

b) Studiare al variare di $\alpha > 0$ la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f nel dominio di definizione.

c) Calcolare per $\alpha = 1/2$ l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$.

Svolgimento. *a*) Il dominio di definizione della funzione è $\mathbb{R}^2$ per ogni $\alpha > 0$.
b) La funzione è continua in tutto il suo dominio, $\mathbb{R}^2$, per ogni $\alpha > 0$ in quanto composizione di funzioni continue (elevamento a potenza di ordine α composta con un polinomio). Per quanto riguarda la regolarità osserviamo che in generale la funzione $g(x) = x^\alpha$ è derivabile per $x \geq 0$ se $\alpha \geq 1$, mentre per $0 < \alpha < 1$ non è derivabile in 0. Quindi:
Per $\boxed{\alpha \geq 1}$ la funzione $f(x,y)$ risulta $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ in quanto composizione di funzioni C^∞. Analogamente per $\boxed{0 < \alpha < 1}$ la funzione $f(x,y)$ risulta $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$. Il gradiente della funzione in questi due casi è

$$\nabla f(x,y) = \alpha\left((x-y)^2 + y^4\right)^{\alpha-1} \begin{pmatrix} 2(x-y) \\ -2(x-y) + 4y^3 \end{pmatrix} \ .$$

Rimane da studiare la derivabilità e la differenziabilità della funzione in $(0,0)$ per $0 < \alpha < 1$.

$\boxed{0 < \alpha < 1}$ Per quanto riguarda la derivabilià si osservi che

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2\alpha}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{2\alpha}}{x} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1/2 \\ \nexists & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

e analogamente

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2 + 4y^4)^\alpha}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^{2\alpha}}{y}(1 + o(1)) = \begin{cases} 0 & \alpha > 1/2 \\ \nexists & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Quindi la funzione risulta derivabile in $(0,0)$ per $1/2 < \alpha < 1$ con gradiente pari a $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per quanto riguarda la differenziabilità per $1/2 < \alpha < 1$ passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \left\langle \nabla f(\vec{0}), \vec{x} \right\rangle}{\|\vec{x}\|} &= \frac{\left((x-y)^2 + y^4\right)^\alpha}{\|\vec{x}\|} \\ &\overset{coo.pol.}{=} \frac{\rho^{2\alpha}\left((\cos\theta - \sin\theta)^2 + \rho^2 \sin^4\theta\right)^\alpha}{\rho} \\ &= \rho^{2\alpha-1}\left((\cos\theta - \sin\theta)^2 + \rho^2\sin^4\theta\right)^\alpha \to 0 \iff 2\alpha - 1 > 0 \ . \end{aligned}$$

Quindi la funzione risulta differenziabile in $(0,0)$ se, e solo se, $1/2 < \alpha$.

$c)$ Per $\alpha = 1/2$ si ha $\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ quindi l'eqazione del piano tangente

$$z = f(1,0) + \left\langle \nabla f(1,0), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + (x-1) - y = x - y \ .$$

$\square$

2) Data la forma differenziale

$$\omega := \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}}\,dx + \frac{-1/2}{(x^2-y)^{2/3}}\,dy$$

a) Studiare la chiusura e l'esattezza di ω. Nel caso in cui la forma risulti esatta calcolarne una primitiva.

b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva definita dall'equazione $y = e^x + 1$ per $x \in [0,1]$

Svolgimento. Il dominio di ω è formato da due componenti connesse

$$D_\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 - y \neq 0\} = D_+ \cup D_- \;\; ; \;\; D_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 > y\}\,, \;\; D_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 < y\}$$

onguna della quali (D_+ e D_-) è semplicemente connessa. Quindi il dominio, seppur non connesso, è un indieme semplicemente connesso. La forma differenziale è chiusa

$$\partial_x a_2 = \partial_x \frac{-1/2}{(x^2-y)^{2/3}} = \frac{2x}{3\,(x^2-y)^{5/3}} = \partial_y \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}} = \partial_y a_1 \;,$$

quiandi, essendo il dominio semplicemente connesso, è anche esatta. Calcoliamo una primitiva f:

$$\partial_x f(x,y) = a_1(x,y) = \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}} \;\Rightarrow\; f(x,y) = \int \frac{x}{(x^2-y)^{2/3}} dx \;+\; h(y) = \frac{3}{2}(x^2-y)^{1/3} + h(y)$$

Per determinare h imponiamo la seconda equazione su f

$$\frac{-1}{2(x^2-y)^{2/3}} + \partial_y h(y) = \partial_y f(x,y) = a_2(x,y) = frac{-}1/2(x^2-y)^{2/3} \;\Rightarrow\; \partial_y h(y) = 0$$

ossia $h(y) = cost$. Scegliendo, per semplicità, $h = 0$ otteniamo la primitiva

$$\boxed{f(x,y) = \frac{3}{2}(x^2-y)^{1/3}}$$

b) Si ossevi che il sostegno della curva γ si trova nell'insieme D_-. L'integra è dato da

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f((1, 1+e)) - f(0,2)) = \frac{3}{2}(-e^{1/3} + 2^{1/3})$$

□

3) Calcolare l'ntegrale

$$\int_V (x^2(1+y^{1/3})+y^2)\,dxdydz$$

dove $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+4y^2 \le z \le 1\}$

Svolgimento. L'insieme di integrazione è simmetrico rispetto allo scambio $x \to -x$ e $y \to -y$. La funzione integranda f è formata dalla somma di tre termini

$$f(x,y,z) = x^2 + x^2y^{1/3} + y^2$$

e si osservi che il termine $x^2y^{1/3}$ da un contributo nullo in quanto è dispari rispetto all y. Quindi

$$\int_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_V (x^2+y^2)\,dxdydz$$

L'insieme di integrazione si può parametrizzare per "strati" nel modo seguente

$$0 \le z \le 1 \ , \ 0 \le x^2+4y^2 \le z$$

Quindi

$$\int_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^1 dz \int_{\{0\le x^2+4y^2\le z\}} \{x^2+y^2)\,dxdy$$

Per calcolare il primi integrale passimo in coordinate ellittiche:

$$x = \rho\cos\theta \ , \ y = (1/2)\rho\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \rho \le \sqrt{z} \quad , \quad \theta \in [0,2\pi]$$

la matrice Jacobiana della trasformazione risulta

$$J(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & (1/2)\sin\theta \\ -\rho\sin\theta & (1/2)\rho\cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad |\mathrm{det}J(\rho,\theta)| = \frac{\rho}{2} \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_V f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_0^1 dz \int_{\{0\le x^2+4y^2\le z\}} (x^2+y^2)\,dxdy \\
&= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} d\rho\,\frac{\rho}{2}(\rho^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}\rho^2\sin^2\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{4})) \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} d\rho\frac{\rho^3}{2} \\
&= (\pi+\pi/4)\int_0^1 dz\frac{z^2}{8} = \frac{5\pi}{4}\,\frac{z^3}{24}\Big|_0^1 \\
&= \frac{5\pi}{96}
\end{aligned}$$

□

4) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x, y, 0)$ attraverso la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\ ,\ 0 \leq z\}$ orientata in modo che la terza componente del vettore normale sia negativa. Calcolare, inoltre, il volume dell'insieme $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\ ,\ 0 \leq z\}$.

Svolgimento. Si osservi che la divergenza di $\vec{F}$ è costante ed uguale $\mathrm{div}\vec{F} = 2$. Quindi, dal momento che la divergenza del campo fornisce un contributo non nullo, per calcolare il flusso potremmo applicare direttamente la definizione di flusso e calcolare l'integrale. Tuttavia se vogliamo comunque applicare il teorema della divergenza chiudiamo prima la superficie con il disco

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2/4 = 1\ ,\ z = 0\}$$

e orientiamo la superficie chiusa $\Sigma = S \cup D$ verso l'esterno. Allora si osservi il volume interno alla superficie Σ è esattamente il volume V del punto b) e che

$$2\mathrm{vol}(V) = \int_V \mathrm{div}\vec{F} = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle + \int_D \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{D+} \right\rangle = \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle$$

dove $\vec{N}_{S+}, \vec{N}_{D+}$ sono i vettori normali a S e D, rispettivamente, orientati verso l'esterno di Σ, e dove si è osservato che $\left\langle \vec{F}, \vec{N}_{D+} \right\rangle = 0$ in quanto la terza componente di $\vec{F}$ è nulla. Quindi per risolvere i punti a) e b) possiamo o calcolare il volume di V o calcolare il flusso fi $\vec{F}$ attraverso S. Procediamo calcolando il volume di V usanto coordinate ellissoidali:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sin\varphi\cos\theta \\ 2\rho\sin\varphi\sin\theta \\ 3\rho\cos\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & 2\sin\varphi\sin\theta & 3\cos\varphi \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & 2\rho\cos\varphi\sin\theta & -3\rho\sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & 2\rho\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$0 \leq \rho \leq 1\ ,\ \varphi \in [0, \pi/2] \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

ottenute sostituento le coordiante ellissoidali nelle relazioni che definiscono V. Si noti in particolare che $\det J(\rho, \varphi, \theta) = 6\rho^2 \sin\varphi$. Quindi

$$\mathrm{vol}(V) = \int_V dxdydz = 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \int_0^1 d\rho\rho^2 = 12\pi \cdot \left(-\cos\varphi\big|_0^{\pi/2}\right) \cdot \left(\rho^3/3\big|_0^1\right) = 4\pi\ .$$

Quindi

$$\boxed{\mathrm{vol}(V) = 4\pi}$$

mentre $\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle = 2\mathrm{vol}(V) = 8\pi$. Tuttavia l'orientamento di S richiesto nel punto a) indicato con $\vec{N}_{S^p}$ è opposto a S^+. In conclusione si ha

$$\boxed{\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S^p} \right\rangle = -\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{N}_{S+} \right\rangle - 8\pi\ .}$$

□

5) *Data l'equazione differenziale*

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^{2t} + \sin(t)$$

Trovare la soluzione generale dell'equazione e risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale $\dot{x}(0) = x(0) = 0$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale lineare e del secondo ordine. Risolviamo l'omogenea: le radici del polinomio caratteristico sono

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad , \quad \lambda_+ = 3 \ , \ \lambda_- = 2$$

quindi

$$\boxed{x_{om}(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}}$$

Il termine noto $f(t)$ è combinazione lineare di due funzioni $f_1(t) = e^{2t}$ e $f^2(t) = \sin(t)$. Troviamo due soluzioni particolari y_i corrispondente al termine noto f_i, per $i = 1, 2$, e per linearità la funzione $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ sarà una soluzione particolare corrispondente a termine noto $f(t)$.

Cominciamo trovando una soluzione particolare corrispondente al termine noto $f_1(t) = e^{2t}$. Osservando che 2 è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea cerchiamo una soluzione della forma $y_1(t) = Kte^{2t}$. Sostituendo nell'equazione si ha :

$$\ddot{y_1} - 5\dot{y_1} + 6y_1t = e^{2t} \iff K(2e^{2t} + 2e^{2t} + 4te^{2t} - 5(e^{2t} + 2te^{2t}) + 6te^{2t}) = K(4e^{2t} - 5e^{2t}) = e^{2t}$$

Quindi $K = -1$ e $y_1(t) = -te^{2t}$.

Per il termine noto $f^2(t) = \sin(t)$ cerchiamo una soluzione particolare della forma $y_2(t) = C\sin(t) + D\cos(t)$, che sostituita nell'equazione

$$-C\sin(t) - D\cos(t) - 5(C\cos(t) - D\sin(t)) + 6(C\sin(t) + D\cos(t)) = \sin(t)$$

da cui

$$\sin(t)(5D+5C) + \cos(t)(-5C+5D) = \sin(t) \iff D-C = 0 \ , \ D+C = 1/5 \ , \iff D = C = 1/10$$

Quindi $y_2(t) = \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t))$. Quindi una soluzione particolare è

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = -e^{2t} + \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t))$$

e la soluzione generale dell'equazione è

$$\boxed{x_{Gen}(t) = Ae^{3t} + Be^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t))}$$

Imponimo sa luzione del problema di Cauchy:

$$x_{Gen}(0) = 0 = A + B + \frac{1}{10} \quad , \quad \dot{x}_{Gen}(0) = 0 = 3A + 2B - \frac{9}{10}$$

da cui $B = -12/10$ e $A = 11/10$. Quindi la soluzione del problema di Cacuchy

$$\boxed{x_{Cauchy}(t) = \frac{11}{10}e^{3t} - \frac{12}{10}e^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{10}(\sin(t) + \cos(t)) \ .}$$

$\square$