Analisi II - Ingegneria Gestionale
Soluzioni scritto del 19 Gennaio 2022

- *Calcolare il seguente integrale improprio*

$$\int_D \frac{1}{(x+y)^{\alpha+1}}\,dxdy \quad 0<\alpha<1$$

dove $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le -x+\beta \;\;,\; x\le y\le 2x\}$ *con* $\beta>1$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in quanto il denominatore della funzione integranda si annulla per in $x=0, y=0$. Consideriamo l'insieme

$$D_\varepsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x+\varepsilon\le y\le -x+\beta \;,\; x\le y\le 2x\}$$

La funzione ristretta a D_ε è continua e limitata quindi integrabile. Cambiamo variabili

$$u=y+x \quad,\quad v=y/x \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{u}{1+v}\;,\; y=\frac{uv}{1+v}$$

da cui si ricava

$$D_\varepsilon = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \varepsilon\le u\le 1\;,\; 1\le v\le 2\}$$

La matrice Jacobiana è

$$J(u,v)=\begin{pmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2}\end{pmatrix} \quad,\quad det(J(u,v))=\frac{u}{(1+v)^2}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{D_\varepsilon}\frac{1}{(x+y)^{\alpha+1}}\,dxdy &= \int_\varepsilon^\beta du\int_1^2 dv\frac{1}{u^{\alpha+1}}\cdot\frac{u}{(1+v)^2} = \int_\varepsilon^\beta du\int_1^2 dv\frac{1}{u^\alpha(1+v)^2}\\ &= \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^\beta\cdot\left(-\frac{1}{(1+v)}\right)_1^2 = \frac{(\beta^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})}{6(1-\alpha)} \overset{\varepsilon\to0^+}{\to} \frac{\beta^{1-\alpha}}{6(1-\alpha)}\end{aligned}$$

□

- *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = 2 + 4x^2 + y^2 - 4xy + x^3 + x^4$$

a) Studiare gli estremi liberi della funzione.

b) Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione nella regione

$$E := \{(x,y) \mid x \geq 1\}$$

Svolgimento. *a*) La funzione è di classe C^∞. Troviamo i punti critici imponendo l'annullamento del gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4y + 3x^2 + 4x^3 \\ 2y - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La seconda equazione ha soluzioni $y = 2x$ che sostituita nella prima

$$3x^2 + 4x^3 = 0 \quad , \quad x = 0 \ , \ x = -3/4$$

I punti critici sono

$$\boxed{(0,0) \quad , \quad (-3/4, -3/2)}$$

La matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 + 6x + 12x^2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left(H_f(0,0)\right) = 0 \ ,$$

ossia è semidefinita positiva in quanto la traccia è positiva. Mentre

$$H_f(-3/4, -3/2) = \begin{pmatrix} 41/4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left(H_f(0,0)\right) > 0 \ , \ H_f(0,0)_{1,1} = 41/4 > 0$$

ossia è definita positiva, quindi $(-3/4, -3/2)$ è un **minimo relativo**. Per capire la natura del punto critico $(0,0)$ studiamo il segno di

$$f(x,y) - f(0,0) = 4x^2 + y^2 - 4xy + x^3 + x^4 = (2x - y)^2 + x^3 + x^4,$$

ponendo $y = 2x$

$$f(x, 2x) - f(0,0) = x^3 + x^4 = x^3(1 + x)$$

che cambia segno nell'intorno di $x = 0$, quindi $(0,0)$ è un punto di **sella**.

Il vincolo è chiuso ma non limitato. Nella parte interna $x > 1$ la funzione f non presenta estremi liberi. Rimane da studiare il comportamento di f sul vincolo $x = 1$:

$$f(1,y) = y^2 - 4y + 8 \quad , \quad f'(1,y) = 2y - 4 = 0 \iff y = 2$$

quindi $(1,2)$ è un minimo di f lungo la curva $(1,y)$. Il gradiente di f nel punto $(1,2)$ è

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

diretto nel putno $(1,2)$ nella parte interna del vincolo $x \geq 1$. Quindi $(1,2)$ è un **minimo relativo** di $f \restriction E$. $\square$

- *Data la funzione*
$$f(x,y)=(1+x-\alpha y)^{1/3}\,x\ ,\ \ \alpha\neq 0$$

a) *Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità della funzione su* $\mathbb{R}^2$.

b) *Calcolare le derivate direzionali e la normale al piano tangente al grafico della funzione in* $(0,1)$.

Svolgimento. la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e per i teoremi delle funzioni continue è continua nel suo dominio. Per quanto riguarda la regolarità la presenza della radice indica che possono esserci dei problemi nei punti in cui si annulla il suo argomento ossia sulla retta $x=\alpha y-1$. Per $\boxed{x\neq\alpha y-1}$ si ha
$$\partial_x f(x,y)=\frac{x}{3}\,(1+x-\alpha y)^{-2/3}+(1+x-\alpha y)^{1/3}$$
mentre
$$\partial_y f(x,y)=\frac{-\alpha x}{3}\,(1+x-\alpha y)^{-2/3}$$
Che sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2\setminus\{x=\alpha y-1\}$ quindi f è differenziabile nella regione $x\neq\alpha y-1$.

Per $\boxed{x=\alpha y-1}$, cominciamo studiando la derivabilità. Fissato il generico punto sulla retta $(\alpha y_0-1,x_0)$ con $x_0\in\mathbb{R}$, calcoliamo
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha y_0-1}\frac{f(x,y_0)-f(\alpha y_0-1,y_0)}{x-(\alpha y_0-1)}&=\lim_{x\to\alpha y_0-1}\frac{(x-\alpha y_0+1))^{1/3}\,x}{x-(\alpha y_0-1)}\\&=\lim_{x\to\alpha y_0-1}\frac{x}{(x-(\alpha y_0-1))^{2/3}}=\exists=0\iff\alpha y_0-1=0\end{aligned}$$
mentre
$$\begin{aligned}\lim_{y\to y_0}\frac{f(\alpha y_0-1,y)-f(\alpha y_0-1,x_0+1)}{y-y_0}&=\lim_{y\to y_0}\frac{(-\alpha(y-y_0))^{1/3}\,(\alpha y_0-1)}{y-y_0}\\&=\lim_{y\to y_0}\frac{-\alpha^{1/3}(\alpha y_0-1)}{(y-y_0)^{2/3}}=\exists=0\iff\alpha y_0-1=0\end{aligned}$$
Quindi nella retta $x_0=\alpha y_0-1$ la funzione è derivabile solo nel punto $(0,1/\alpha)$ dove
$$\nabla f(0,1/\alpha)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$
Per quanto riguarda la differenziabilità nel punto $(0,1/\alpha)$, per $(x,y)\to(0,1/\alpha)$ si ha
$$\begin{aligned}\frac{|f(x,y)-f(0,1/\alpha)-\langle\nabla f(0,1/\alpha),(x,y-1/\alpha)\rangle|}{(x^2+(y-1/\alpha)^2)^{1/2}}&=\frac{|1+x-\alpha y|^{1/3}|x|}{(x^2+(y-1/\alpha)^2)^{1/2}}\\&\overset{coo.\,pol.}{=}\frac{|\rho\cos\theta-\rho\sin\theta|^{1/3}\rho|\cos\theta|}{\rho}\leq\rho^{1/3}(2)^{1/3}\to 0\end{aligned}$$
Quindi f è differenziabile in $(0,1/\alpha)$. Infine dato che la funzione è differenziabile in $(0,1)$ per il calcolo delle derivate direzionali usiamo la relazione
$$D_{\underline{v}}f(0,1)=\langle\nabla f(0,1),\underline{v}\rangle=(1-\alpha)^{1/3}v_1$$

Per quanto riguarda la normale al piano tangente al grafico di f, la superficie cartesiana associata al grafico di f è $(x, y, f(x, y))$ ed il vettore normale al piano tangente è dato da

$$\underline{n}(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_x f(x, y) \\ -\partial_y f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{n}(0, 1) = \begin{pmatrix} -(1-\alpha)^{1/3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

- *Data la forma differenziale*

$$\omega := \frac{y}{(-1+\alpha xy)^{2/3}}dx + \frac{x}{(-1+\alpha xy)^{2/3}}dy \quad , \; \alpha > 0$$

b) stabilire se la forma differenziale è chiusa e se è esatta. Se esatta calcolarne una primitiva.

c) Data la forma differenziale $\omega_1 = \frac{y^2}{2}dx$ *calcolare l'integrale di* $\omega + \omega_1$ *lungo il segmento* $(0,0) \to (-1,1)$

Svolgimento. *a*) Il dominio della forma differenziale è formato da 3 componenti connesse

$$D = D_+ \cup D_0 \cup D_-$$

dove

$$D_+ = \{y > 1/\alpha x \;, x > 0\} \quad , \quad D_- = \{y < 1/\alpha x \;,\; x < 0\} \quad , \quad D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_+} \cup \overline{D_-}$$

Tutti e tre gli insiemi sono convessi. Ad esempio D_+ è convesso in quanto la funzione $1/\alpha x$ è convessa per $x > 0$. Analogamente D_- è convesso in quanto la funzione $1/\alpha x$ è concava per $x < 0$. Mentre l'insieme D_0 è stellato rispetto all'origine. Quindi la forma differenziale che è chiusa è anche esatta. La primitiva

$$\partial_x f = \frac{y}{(-1+\alpha xy)^{2/3}} \Rightarrow f = h(y) + \int dx \frac{y}{(-1+\alpha xy)^{2/3}} = h(y) + \frac{3}{\alpha}(-1+\alpha xy)^{1/3}$$

quindi

$$\partial_y f = \partial_y h + \frac{x}{(-1+\alpha xy)^{2/3}} = \frac{x}{(-1+\alpha xy)^{2/3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{3}{\alpha}(-1+\alpha xy)^{1/3}}$$

che è una primitiva di ω. Si osservi che f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non è derivabile sulle curve $1 + \alpha xy = 0$.

b) Si osservi che la forma ω_1 non è chiusa. Se scriviamo $\omega_1 = a_1 dx + a_2 dy$ con $a_1 = \frac{y^2}{2}$ e $a_2 = 0$ si ha che

$$\partial_y a_1 = y \neq 0 = \partial_x a_2$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)\to(-1,1)} (\omega + \omega_1) &= f(-1,1) - f(0,0) + \int_{(0,0)\to(-1,1)} \omega_1 \\ &= -\frac{3}{\alpha}(1+\alpha)^{1/3} + \frac{3}{\alpha} + \int_{(0,0)\to(-1,1)} \omega_1 = \int_{(0,0)\to(-1,1)} \omega_1\end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale si osservi che la curva

$$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0,1] \;\; ; \;\; \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è una parametrizzazione del segmento $(0,0) \to (-1,1)$. Allora

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_0^1 a_1(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + a_2(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = -\int_0^1 \frac{t^2}{2}dt = -\frac{t^3}{6}\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

Quindi

$$\int_{(1,-1)\to(-1,1)} (\omega + \omega_1) = -\frac{3}{\alpha}(1+\alpha)^{1/3} + \frac{3}{\alpha} - \frac{1}{6}$$

□