

Analisi II - Ingegneria Gestionale
Soluzioni scritto del 10 Febbraio 2022

• Sia data la funzione

$$f(x, y) = 2 - 2y^2 + x^2y^2 - x^4$$

a) Studiare gli estremi liberi della funzione.

b) Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione nella regione

$$E := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Svolgimento. a) La funzione è di classe C^∞ . Troviamo i punti critici imponendo l'annullamento del gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 - 4x^3 \\ -4y + 2yx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La seconda equazione ha soluzioni $y = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$. Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione si ottiene $x = 0$. Sostituendo $x = \pm\sqrt{2}$ nella prima

$$\pm 2\sqrt{2}y^2 - 8(\pm\sqrt{2}) = 0 \iff y = \pm 2$$

I punti critici sono

$$(0, 0) \ , \ (\sqrt{2}, 2) \ , \ (-\sqrt{2}, 2) \ , \ (\sqrt{2}, -2) \ , \ (-\sqrt{2}, -2)$$

La matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 - 12x^2 & 4xy \\ 3x^2 & -4 + 2x^2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(0, 0)) = 0,$$

ossia è semidefinita negativa (un autovalore è -4 . Mentre si osservi che

$$\det(H_f(\pm\sqrt{2}, \pm 2)) < 0,$$

in quanto il coefficiente $H_f(\pm\sqrt{2}, \pm 2)_{2,2} = 0$. Quindi sono tutti **punti di sella**. Per capire la natura del punto critico $(0, 0)$ studiamo il segno di

$$f(x, y) - f(0, 0) = -2y^2 + x^2y^2 - x^4 = -y^2(2 - x^2) - x^4$$

da cui si osserva che nella striscia $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, che contiene $(0, 0)$, si ha

$$f(x, y) - f(0, 0) = -y^2(2 - x^2) - x^4 \leq 0$$

Quindi $(0, 0)$ è un **massimo relativo**.

Il vincolo è chiuso e limitato. Quindi per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto. Nella parte interna, $x^2 + y^2 < 1$ abbiamo già trovato un punto estremaie $(0, 0)$. Studiamo la funzione sulla frontiera. Possiamo procedere in due modi. skip

Primo metodo. Osservando che la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ definisce un vincolo regolare, troviamo i punti critici della la Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = 2 - 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \Rightarrow \nabla L = \begin{pmatrix} 2xy^2 - 4x^3 - 2\lambda x \\ -4y + 2yx^2 - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La seconda equazione da

$$y(-4 + 2x^2 - 2\lambda) = 0 \iff y = 0, \quad x^2 = \lambda + 2$$

Sostituendo $y = 0$ nella terza da $x = \pm 1$, che sostituiti nella prima danno

$$-4(\pm 1) - 2\lambda(-\pm 1) = 0 \iff \lambda = -2$$

Ossia la terna $(\pm 1, 0, -2)$ è un punto critico della Lagrangiana. Sostituendo $x^2 = \lambda + 2$ nella terza si ha $y^2 = -\lambda - 1$. Quindi sostituendo nella prima $x(2y^2 - 4x^2 - 2\lambda) = 0$ si ha

$$\pm(\sqrt{\lambda + 2})(-2\lambda - 2 - 4\lambda - 8 - 2\lambda) = 0 \iff \lambda = -2, \quad \lambda = -10/8$$

Per $\lambda = -2$ otteniamo $x = 0$ e $y = \pm 1$ ossia $(0, \pm 1, 2)$. Mentre $\lambda = -5/4$ si ha $y = \pm 1/2$ e $x = \pm\sqrt{3}/2$. In conclusione sulla frontiera abbiamo trovato 8 punti critici

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ \pm 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \pm 1/2 \end{pmatrix}.$$

Confrontiamo i valori che assume la funzione su questi 4 punti e sull'origine:

$$f(0, 0) = 2, \quad f(\pm 1, 0) = 1, \quad f(0, \pm 1) = 0, \quad f(\pm 1/2, \sqrt{3}/2) = f(\pm 1/2, -\sqrt{3}/2) = 9/8$$

Quindi $(0, 0)$ è il **massimo assoluto** mentre i punti $(0, \pm 1)$ sono punti di **minimo assoluto**.

Secondo metodo. Il vincolo si può parametrizzare nel modo seguente

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

In questo caso la parametrizzazione non è regolare. I punti di non regolarità giacciono sugli estremi $x = \pm 1$. Sostituendo nella funzione si ha

$$f(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) = 2 - 2(1 - x^2) + x^2(1 - x^2) - x^4 = 3x^2 - 2x^4 \Rightarrow f' = x(6 - 8x^2)$$

che si annulla per $x = 0$, e $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Osservando che la funzione va valutata anche nei punti critici $x = \pm 1$, si ritrovano tutti i punti trovati nella Lagrangiana. $\square$

• Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_D \frac{x}{(x^2 - 4)^2(x + y)} dx dy ,$$

dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 - y\}$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in quanto il denominatore della funzione integranda si annulla per in $(x, y) = (0, 0)$. Il dominio di integrazione è semplice sia rispetto alla variabile x che rispetto alla variabile y . Vista la funzione integranda, per svolgere l'integrale conviene riscrivere l'insieme di integrazione come insieme semplice rispetto alla variabile y :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq -x + 1, \}$$

e considerare la famiglia di sottoinsiemi di D

$$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq -x + 1, \}$$

con $\varepsilon > 0$. La funzione ristretta a D_ε è continua e limitata quindi integrabile. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \frac{x}{(x^2 - 4)^2(x + y)} dx dy &= \int_\varepsilon^1 dx \frac{x}{(x^2 - 4)^2} \int_0^{-x+1} \frac{1}{x + y} dy = \int_\varepsilon^1 dx \frac{x}{(x^2 - 4)^2} \ln |x + y| \Big|_0^{-x+1} \\ &= - \int_\varepsilon^1 dx \frac{x \ln x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x^2 - 4} \Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 dx \frac{1}{(x - 2)(x + 2)x} \\ &= \frac{\ln x}{2(x^2 - 4)} \Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 dx \left(\frac{1}{8(x + 2)} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{8(x - 2)} \right) \\ &= \frac{\ln x}{2(x^2 - 4)} - \frac{\ln(x + 2)}{16} + \frac{\ln(x)}{8} - \frac{\ln(|x - 2|)}{16} \Big|_\varepsilon^1 \\ &= -\frac{\ln(3)}{16} - \frac{\ln \varepsilon}{2(\varepsilon^2 - 4)} + \frac{\ln(\varepsilon + 2)}{16} - \frac{\ln(\varepsilon)}{8} + \frac{\ln(|\varepsilon - 2|)}{16} \\ &= -\frac{\ln(3)}{16} + \frac{\ln(\varepsilon + 2)}{16} + \frac{\ln(|\varepsilon - 2|)}{16} - \ln(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon^2 - 4)} \right) \\ &= -\frac{\ln(3)}{16} + \frac{\ln(\varepsilon + 2)}{16} + \frac{\ln(|\varepsilon - 2|)}{16} + \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{16} (1 + o(1)) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(3)}{16} + \frac{\ln(2)}{8} = \frac{\ln(4/3)}{16} \end{aligned}$$

□

- Calcolare il flusso del campo vettoriale $E = (x(z + y^2), -3y^2x, -zy^2)$ attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 4, -2 \leq x\}$$

orientata in modo che il vettore normale alla superficie abbia nel punto $(4, 0, 0)$ prima componente negativa.

Svolgimento. Vogliamo applicare il teorema della divergenza. Si osservi che la superficie è invariante per rotazione intorno all'asse x . Quindi, in particolare, è invariante per le trasformazioni $y \rightarrow -y$ e $z \rightarrow -z$. La divergenza del campo $\text{div}(E) = z - 6yx$ è una funzione dispari sia nella variabile z che nella variabile y . Se chiudiamo la superficie con il disco

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 3, -2 = x \right\}$$

orientato con il vettore normale avente prima componente negativa, otteniamo una superficie chiusa $\Sigma = S \cup D$ invariante per rotazioni intorno all'asse x e il cui vettore normale punta verso l'interno della superficie. Indichiamo con V_Σ il volume contenuto nella parte interna di Σ . Il teorema della divergenza da

$$\Phi_S(E) + \Phi_D(E) = - \int_{V_\Sigma} \text{div}(E) = 0 \Rightarrow \Phi_S(E) = -\Phi_D(E)$$

dove $\int_{V_\Sigma} \text{div}(E) = 0$ in quanto la divergenza di E è dispari nelle variabili z, y , ed il segno meno tiene conto del fatto che con l'orientamento imposto da S su Σ stiamo calcolando il flusso entrante in Σ . Calcoliamo $\Phi_D(E)$. Parametizziamo D in coordinate ellittiche:

$$\sigma_D = \begin{pmatrix} -2 \\ \rho \cos \theta \\ 2\rho \sin \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

I vettori tangenti ed in vettore normale sono

$$\partial_\rho \sigma_D = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta \sigma_D = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \sin \theta \\ 2\rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \partial_\rho \sigma_D \wedge \partial_\theta \sigma_D = \begin{pmatrix} 2\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si noti che il vettore normale ha l'orientamento richiesto su D . Quindi

$$\begin{aligned} \Phi_D(E) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \langle E(\rho, \theta), \partial_\rho \sigma_D \wedge \partial_\theta \sigma_D \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho -2(2\rho \sin \theta + \rho^2 \cos^2 \theta)2\rho = -4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \rho^3 \cos^2 \theta \\ &= -4 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_0^{\sqrt{3}} = -9\pi \end{aligned}$$

dove si è osservato che $\int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta = 0$. In conclusione

$$\Phi_S(E) = -\Phi_D(E) = 9\pi.$$

□

•Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y e^{x-2y} , & x \leq 2y \\ y + xy - 2y^3 , & x > 2y \end{cases} ,$$

studiarne la continuità, la derivabilità e la differenziabilità su $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. La funzione f è la restrizione agli insiemi $x \leq 2y$ e $x > 2y$ di due funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$h(x, y) = y e^{x-2y} , \quad g(x, y) = y + xy - 2y^3$$

Quindi negli insiemi $x < 2y$ e $x > 2y$ che sono aperti e non hanno punti di accumulazione in comune la funzione f risulta essere continua e C^∞ . Di conseguenza l'analisi va fatta solo sulla retta $2y = x$. Per quanto riguarda la continuità preso un punto sulla retta $(2y_0, y_0)$ si deve avere

$$\lim_{\substack{x \leq 2y \\ (x,y) \rightarrow (2y_0, y_0)}} f(x, y) = f(2y_0, y_0) = \lim_{\substack{x > 2y \\ (x,y) \rightarrow (2y_0, y_0)}} f(x, y)$$

quindi

$$\lim_{\substack{x \leq 2y \\ (x,y) \rightarrow (2y_0, x_0)}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \leq 2y \\ (x,y) \rightarrow (2y_0, x_0)}} h(x, y) = h(2y_0, y_0) = y_0 = f(2y_0, y_0)$$

$$\lim_{\substack{x > 2y \\ (x,y) \rightarrow (2y_0, x_0)}} f(x, y) = \lim_{\substack{x > 2y \\ (x,y) \rightarrow (2y_0, x_0)}} g(x, y) = g(2y_0, y_0) = y_0 + 2y_0^2 - 2y_0^3$$

da cui segue che la funzione è continua lungo la curva $x = 2y$ solo nei punti che verificano la condizione

$$y_0 = y_0 + 2y_0^2(1 - y_0) = 0 \iff y_0 = 0, \quad y_0 = 1 \iff (0, 0), (2, 1)$$

Per la derivabilità, studiamo la derivabilità solo nei punti in cui f è continua e, in questi punti, possiamo usare il fatto che h e g sono funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$: le derivate parziali destre/sinistre in un punto esistono e coincidono con le derivate parziali delle funzioni nel punto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x, 0) - h(0, 0)}{x} = \partial_x h(0, 0) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \partial_x g(0, 0) = 0$$

da cui che la derivata parziale rispetto a x di f è $\partial_x f(0, 0) = 0$. Mentre

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{h(0, y) - h(0, 0)}{y} = \partial_y h(0, 0) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{g(0, y) - g(0, 0)}{y} = \partial_{y,+} g(0, 0) = \partial_y g(0, 0) = 1 .$$

Quindi f è derivabile in $(0, 0)$ e $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mentre f non è derivabile in $(2, 1)$. Si osservi infatti che

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{f(2, y) - f(2, 1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{h(2, y) - h(2, 1)}{y - 1} = \partial_y h(2, 1) = -1$$

mentre

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{f(2, y) - f(2, 1)}{y - 1} \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{g(2, y) - g(2, 1)}{y - 1} = \partial_{y,+} g(2, 1) = \partial_y g(2, 1) = -5 .$$

Per quanto riguarda la differenziabilità:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \leq 2y \\ \underline{x} \rightarrow \underline{0}}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{x} \rangle}{\|\underline{x}\|} &= \lim_{\substack{x \leq 2y \\ \underline{x} \rightarrow \underline{0}}} \frac{h(\underline{x}) - y}{\|\underline{x}\|} = \lim_{\substack{x > 2y \\ \underline{x} \rightarrow \underline{0}}} \frac{y e^{x-2y} - y}{\|\underline{x}\|} \\ &= \lim_{\substack{x \leq 2y \\ \underline{x} \rightarrow \underline{0}}} \frac{y(x - 2y) + o(\|\underline{x}\|^2)}{\|\underline{x}\|} = 0 \end{aligned}$$

dove si è approssimato $ye^{x-2y} - y = y(x - 2y) + o(y(x - 2y))$ e osservato che $o(y(x - 2y)) = o(\|\underline{x}\|^2)$ e che

$$\frac{|y(x - 2y)| + o(\|\underline{x}\|^2)}{\|\underline{x}\|} \stackrel{coo.pol.}{\sim} \frac{\rho^2(|\cos \theta \sin \theta - 2 \sin^2 \theta| + o(1))}{\|\rho\|} \leq 3(\rho + o(1)) \rightarrow 0$$

dal momento che $\rho \rightarrow 0$ se $\underline{x} \rightarrow \underline{0}$ e $x \leq 2y$. In maniera analoga si vede che

$$\lim_{\substack{x > 2y \\ \underline{x} \rightarrow \underline{0}}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{x} \rangle}{\|\underline{x}\|} = \lim_{\substack{x > 2y \\ \underline{x} \rightarrow \underline{0}}} \frac{g(\underline{x}) - y}{\|\underline{x}\|} = \lim_{\substack{x > 2y \\ \underline{x} \rightarrow \underline{0}}} \frac{xy - 2y^3}{\|\underline{x}\|} = 0$$

Quindi f è differenziabile in $(0, 0)$. □