

Analisi Matematica II
Integrali curvilinei (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (3t^2, 2t), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= 9t^4 + 4t^2 = t^2(9t^2 + 4), \\ \ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{x} dx = \frac{1}{27} \left[x^{2/3} \right]_4^{13} = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $9t^2 + 4 = x \implies 18t dt = dx$.

(2) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{t} \right), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2(1-t^2)}, \\ \ell(\gamma) &= \int_{1/2}^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} \stackrel{(a)}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \stackrel{(b)}{=} \int_{\operatorname{tg}(\pi/12)}^1 \frac{y^2+1}{2y} \frac{2}{y^2+1} dy \\ &= \left[\log y \right]_{\operatorname{tg}(\pi/12)}^1 = -\log \operatorname{tg} \frac{\pi}{12},\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $t = \sin x \implies dt = \cos x dx$, in (b) la sostituzione $x = 2 \operatorname{arctg} y$, per cui $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$.

(3) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (e^t, 2e^{2t}), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= e^{2t} + 4e^{4t} = e^{2t}(1 + 4e^{2t}), \\ \ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 e^t \sqrt{1 + 4e^{2t}} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_2^{2e} \sqrt{x^2 + 1} dx \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{2} \int_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}} \frac{y^2+1}{2y} \frac{y^2+1}{2y^2} dy \\ &= \frac{1}{8} \int_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}} \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dy = \frac{1}{8} \left[\frac{y^2}{2} + 2 \log y - \frac{1}{2y^2} \right]_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}} \\ &= \frac{1}{2} (e\sqrt{4e^2+1} - \sqrt{5}) + \frac{1}{4} \log \frac{2e + \sqrt{4e^2+1}}{2 + \sqrt{5}},\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $2e^t = x \implies 2e^t dt = dx$, in (b) la sostituzione $\sqrt{x^2 + 1} = y - x$, per cui $x = \frac{y^2-1}{2y}$, $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{y^2+1}{2y}$, $dx = \frac{y^2+1}{2y^2} dy$.

(4) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (6t + 10, 8t + 5), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= (6t + 10)^2 + (8t + 5)^2 = 25(4t^2 + 8t + 5), \\ \ell(\gamma) &= \int_{-1}^1 \|\gamma'(t)\| dt = 5 \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2 + 8t + 5} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{5}{4} \int_0^8 \sqrt{x^2 + 1} dx \stackrel{(b)}{=} \frac{5}{4} \int_1^{8+\sqrt{65}} \frac{y^2 + 1}{2y} \frac{y^2 + 1}{2y^2} dy \\ &= \frac{5}{16} \int_1^{8+\sqrt{65}} \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dy = \frac{5}{16} \left[\frac{y^2}{2} + 2 \log y - \frac{1}{2y^2}\right]_1^{8+\sqrt{65}} = 5\sqrt{65} + \frac{5}{8} \log(8 + \sqrt{65}),\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $4(t + 1) = x$, in (b) la sostituzione $\sqrt{x^2 + 1} = y - x$, per cui $x = \frac{y^2 - 1}{2y}$, $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{y^2 + 1}{2y}$, $dx = \frac{y^2 + 1}{2y^2} dy$.

(5) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(1, \sqrt{\frac{2}{t}}, \frac{1}{t}\right), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{(t + 1)^2}{t^2}, \\ \ell(\gamma) &= \int_1^2 \|\gamma'(t)\| dt = \int_1^2 \frac{t + 1}{t} dt = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \left[t + \log t\right]_1^2 = 1 + \log 2.\end{aligned}$$

(6) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(-\frac{1}{2} \sin(2t), -3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t\right), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{1}{4} \sin^2(2t) + 9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t = \frac{5}{2} \sin^2(2t), \\ \ell(\gamma) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(2t)| dt = \sqrt{10} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = -\frac{\sqrt{10}}{2} [\cos(2t)]_0^{\pi/2} = \sqrt{10}.\end{aligned}$$

(7) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-4 \sin t + 4 \sin 4t, 4 \cos t - 4 \cos 4t), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= (-4 \sin t + 4 \sin 4t)^2 + (4 \cos t - 4 \cos 4t)^2 = 32(1 - \cos 3t) = 64 \sin^2\left(\frac{3}{2}t\right), \\ \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 16 \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right| dt = 24 \int_0^{2\pi/3} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) dt \stackrel{(a)}{=} 16 \int_0^\pi \sin x dx \\ &= 16 \left[-\cos x\right]_0^\pi = 32,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\frac{3}{2}t = x \implies \frac{3}{2}dt = dx$.

(8) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\sinh t \cos t - \cosh t \sin t, \sinh t \sin t - \cosh t \cos t, 1), \\ \|\gamma'(t)\|^2 &= (\sinh t \cos t - \cosh t \sin t)^2 + (\sinh t \sin t - \cosh t \cos t)^2 + 1 = 2(\cosh t)^2, \\ \ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^1 \cosh t dt = \sqrt{2} [\sinh t]_0^1 = \sqrt{2} \sinh 1 = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(9) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{1+9(3+2x)} dx \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{9} \int_{2\sqrt{7}}^8 y^2 dy = \frac{1}{27} [y^3]_{2\sqrt{7}}^8 = \frac{512-56\sqrt{7}}{27},$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{18x+28} = y$, per cui $x = \frac{y^2-28}{18}$, $dx = \frac{1}{9}y dy$.

(10) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} \stackrel{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1+y^2}{1-y^2} \frac{2}{1+y^2} dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/3} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \right) dy = \left[\log \left| \frac{y+1}{y-1} \right| \right]_0^{\sqrt{3}/3} = \log \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \log(2+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $x = 2 \operatorname{arctg} y$, per cui $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{2}{y^2+1} dy$.

(11) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{1+2x}} dx = \int_0^{3/2} \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} dx \stackrel{(a)}{=} \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{(y^2-1)^2} dy \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right]_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{4} \log \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}, \end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} = y$, per cui $x = -\frac{y^2-2}{2(y^2-1)}$, $dx = -\frac{y}{(y^2-1)^2} dy$, in (b) la decomposizione $\frac{y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2} \right)$.

(12) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^5 \sqrt{1+\frac{x(9-x)^2}{(6-x)^3}} dx = 3\sqrt{3} \int_0^5 \frac{1}{6-x} \sqrt{\frac{8-x}{6-x}} dx \stackrel{(a)}{=} 3\sqrt{3} \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2-1}{2} y \frac{4y}{(y^2-1)^2} dy \\ &= 6\sqrt{3} \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{(y^2-1)^2} dy = 6\sqrt{3} \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= 6\sqrt{3} \left[y + \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| \right]_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3} \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 3\sqrt{3} \log \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3} \log(2+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{\frac{8-x}{6-x}} = y$, per cui $x = \frac{6y^2-8}{y^2-1}$, $dx = \frac{4y}{(y^2-1)^2} dy$.

(13) Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_1^2 \sqrt{1+(2x)^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} \frac{y^2+1}{2y} \frac{y^2+1}{4y^2} dy = \frac{1}{8} \int_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dy \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{y^2}{2} + 2 \log |y| - \frac{1}{2y^2} \right]_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1+4x^2} = y-2x$, per cui $x = \frac{y^2-1}{4y}$, $dx = \frac{y^2+1}{4y^2} dy$, $\sqrt{1+4x^2} = \frac{y^2+1}{2y}$.

Alternativamente, si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_1^2 \sqrt{1+4x^2} dx \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} \cosh^2 y dy = \frac{1}{4} \int_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} (\cosh 2y + 1) dy = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sinh 2y + y \right]_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} \\ &= \frac{1}{4} \sinh \operatorname{arsinh} 4 \cosh \operatorname{arsinh} 4 - \frac{1}{4} \sinh \operatorname{arsinh} 2 \cosh \operatorname{arsinh} 2 + \frac{1}{4} \log \frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}} \\ &= \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $2x = \sinh y$, $dx = \frac{1}{2} \cosh y dy$.

(14) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{1 + (1 + \sqrt{x})^2} dx \stackrel{(a)}{=} \int_1^2 2(y-1) \sqrt{y^2 + 1} dy \stackrel{(b)}{=} \int_2^5 \sqrt{z} dz - 2 \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz \\ &= \frac{2}{3} \left[z^{3/2} \right]_2^5 - \frac{1}{2} \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz = \frac{2}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{2} + 2 \log z - \frac{1}{2z^2} \right]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{3} \sqrt{5} - \frac{4}{3} \sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{2} - \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{5} - \frac{1}{3} \sqrt{2} - \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}},\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $1 + \sqrt{x} = y$, per cui $x = (y-1)^2$, $dx = 2(y-1) dy$, in (b) la sostituzione $z = y^2 + 1$, per cui $dz = 2y dy$, nel primo integrale, e $\sqrt{1 + y^2} = z - y$, per cui $y = \frac{z^2 - 1}{2z}$, $dy = \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz$, $\sqrt{1 + y^2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$, nel secondo integrale.

(15) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{9e^{6\vartheta} + e^{6\vartheta}} d\vartheta = \sqrt{10} \int_0^1 e^{3\vartheta} d\vartheta = \frac{\sqrt{10}}{3} \left[e^{3\vartheta} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{10}}{3} (e^3 - 1).$$

(16) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{4 + 4\vartheta^2} d\vartheta = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta \stackrel{(a)}{=} 2 \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz = \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{2} + 2 \log z - \frac{1}{2z^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1 + \vartheta^2} = z - \vartheta$, per cui $\vartheta = \frac{z^2 - 1}{2z}$, $d\vartheta = \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz$, $\sqrt{1 + \vartheta^2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$.

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Poiché $\int_\gamma f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sin(\pi t) + \cos(2\pi t)$, e $\|\gamma'(t)\| = \pi\sqrt{5}$. Quindi

$$\int_\gamma f ds = \pi\sqrt{5} \int_0^1 (\sin(\pi t) + \cos(2\pi t)) dt = \pi\sqrt{5} \left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi} + \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \right]_0^1 = 2\sqrt{5}.$$

(2) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi} |\cos t| dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 2 \left[\sin t \right]_0^{\pi/2} = 2.$$

(3) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = (2 \cos t)^2 \cdot 2 \sin t = 8 \cos^2 t \sin t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = 2$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\pi/2}^{\pi} 16 \cos^2 t \sin t dt \stackrel{(a)}{=} 16 \int_{-1}^0 x^2 dx = \frac{16}{3} \left[x^3 \right]_{-1}^0 = \frac{16}{3},$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos t = x$, per cui $dx = -\sin t dt$.

(4) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt \stackrel{(a)}{=} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \left[\arctg x \right]_0^1 = \arctg \frac{\pi}{4} = 1,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sin t = x$, per cui $dx = \cos t dt$.

(5) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = (2t)^3 + t^3 = 9t^3$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4 + 9t^4}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 9t^3 \sqrt{4 + 9t^4} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{4} \int_4^{13} \sqrt{x} dx = \frac{1}{6} \left[x^{3/2} \right]_4^{13} = \frac{1}{6} (13\sqrt{13} - 8),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $4 + 9t^4 = x$, per cui $dx = 36t^3 dt$.

(6) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = 4t$, e $\|\gamma'(t)\| = 5$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} 5 \cdot 4t dt = \left[10t^2 \right]_0^{2\pi} = 40\pi^2.$$

(7) Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{x} dx = \frac{1}{12} \left[x^{3/2} \right]_1^5 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + 4t^2 = x$, per cui $dx = 8t dt$.

(8) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (1-t)(1, 2) + t(3, 6) = (1+2t, 2+4t)$, $t \in [0, 1]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{(1+2t) + 2(2+4t)} = \sqrt{5+10t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = 10 \int_0^1 \sqrt{1+2t} dt \stackrel{(a)}{=} 5 \int_1^3 \sqrt{x} dx = \frac{10}{3} \left[x^{3/2} \right]_1^3 = \frac{10}{3} (3\sqrt{3} - 1),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + 2t = x$, per cui $dx = 2 dt$.

(9) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, \log t)$, $t \in [1, 2]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_1^2 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = t^2$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} [x^{3/2}]_2^5 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $t^2 + 1 = x$, per cui $dx = 2t dt$.

(10) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, e^t)$, $t \in [0, \log 2]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\log 2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = e^{2t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + e^{2t}}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{\log 2} e^{2t} \sqrt{1 + e^{2t}} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} [x^{3/2}]_2^5 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + e^{2t} = x$, per cui $dx = 2e^{2t} dt$.

(11) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, \sqrt{1+t^2})$, $t \in [0, 1]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{1+t^2}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{2t^2+1}{t^2+1}}$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^1 \sqrt{2t^2+1} dt \stackrel{(a)}{=} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{2x} \frac{x^2+1}{2\sqrt{2}x^2} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{2} + 2 \log x - \frac{1}{2x^2} \right]_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} + \sqrt{3}), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{2t^2+1} = x - \sqrt{2}t$, per cui $t = \frac{x^2-1}{2\sqrt{2}x}$, $dt = \frac{x^2+1}{2\sqrt{2}x^2} dx$, $\sqrt{1+2t^2} = \frac{x^2+1}{2x}$.

(12) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$, $t \in [0, 1]$. Poiché $\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$. Quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 t \sqrt{1+t^2} dt \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} [x^{3/2}]_1^2 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1+t^2 = x$, per cui $dx = 2t dt$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1+t, 2t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (2t - 2(1+t)\sqrt{2t}) dt = \left[t^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} t^{3/2} - \frac{4\sqrt{2}}{5} t^{5/2} \right]_0^1 = 1 - \frac{32}{15} \sqrt{2}.$$

(2) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1+t, 2t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (4t^2 + 2e^{t+1}) dt = \left[\frac{4}{3} t^3 + 2e^{t+1} \right]_0^1 = \frac{4}{3} + 2e(e-1).$$

(3) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1 + 2t, 1 + 2t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= 2 \int_0^1 \left((1 + 2t) \log(1 + 2t) - (1 + 2t) \operatorname{arctg}(1 + 2t) \right) dt \stackrel{(a)}{=} \int_1^3 x(\log x - \operatorname{arctg} x) dx \\ &\stackrel{(b)}{=} \left[\frac{1}{2} x^2 (\log x - \operatorname{arctg} x) \right]_1^3 - \frac{1}{2} \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \left[x^2 (\log x - \operatorname{arctg} x) - \frac{1}{2} x^2 + x - \operatorname{arctg} x \right]_1^3 \\ &= -1 + \frac{\pi}{4} - 5 \operatorname{arctg} 3 + \frac{9}{2} \log 3,\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $2t + 1 = x$, per cui $2dt = dx$, e in (b) l'integrazione per parti

$$\text{con } \begin{cases} f(x) = \log x - \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 1}, \\ g'(x) = x \implies g(x) = \frac{1}{2} x^2. \end{cases}$$

(4) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (t^{3/2} - te^t) dt \stackrel{(a)}{=} \left[\frac{2}{5} t^{5/2} - te^t \right]_0^1 + \int_0^1 e^t dt = \left[\frac{2}{5} t^{5/2} + (1 - t)e^t \right]_0^1 = -\frac{3}{5},$$

dove in (a) si è usata l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(t) = t \implies f'(t) = 1, \\ g'(t) = e^t \implies g(t) = e^t. \end{cases}$

(5) Una parametrizzazione della spezzata è $\gamma(t) = \begin{cases} (1 - t, 0), & t \in [0, 1], \\ (0, t - 1), & t \in [1, 2]. \end{cases}$ Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \frac{-dt}{(2 - t)^2} + \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{1}{t - 2} \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = 0.$$

(6) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left(\sin t \cos^2 t (-\sin t) + \cos t \cos t \right) dt = \int_0^{\pi} \cos^4 t dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right]_0^{\pi} = \frac{3}{8} \pi.\end{aligned}$$

(7) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left(\sin^2 t e^{\cos t} (-\sin t) - \cos t \sin t \cos t \right) dt = - \int_0^{\pi} \left(\sin^3 t e^{\cos t} + \cos^2 t \sin t \right) dt \\ &\stackrel{(a)}{=} - \int_{-1}^1 \left((1 - x^2) e^x + x^2 \right) dx \stackrel{(b)}{=} \left[(x^2 - 2x + 1) e^x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3} - \frac{4}{e},\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $\cos t = x$, per cui $-\sin t dt = dx$, e in (b) il risultato $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$.

(8) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left(\cos t \sqrt{1 - \sin t} (-\sin t) + \cos t \cos t \right) dt \stackrel{(a)}{=} \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la disparità della funzione $\sin t \cos t \sqrt{1 - \sin t}$ rispetto all'intervallo d'integrazione.

(9) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} (t \sin t + t^2 \sin t \cdot 2t) dt = \int_0^{\pi} (2t^3 + t) \sin t dt \stackrel{(a)}{=} \left[-(2t^3 + t) \cos t \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (6t^2 + 1) \cos t dt \\ &\stackrel{(b)}{=} \left[-(2t^3 + t) \cos t + (6t^2 + 1) \sin t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 12t \sin t dt \\ &\stackrel{(c)}{=} \left[-(2t^3 + t) \cos t + (6t^2 + 1) \sin t + 12t \cos t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 12 \cos t dt \\ &= \left[-(2t^3 - 11t) \cos t + (6t^2 - 11) \sin t \right]_0^{\pi} = 2\pi^3 - 11\pi,\end{aligned}$$

dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(t) = 2t^3 + t \implies f'(t) = 6t^2 + 1, \\ g'(t) = \sin t \implies g(t) = -\cos t, \end{cases}$ in (b) con $\begin{cases} f(t) = 6t^2 + 1 \implies f'(t) = 12t, \\ g'(t) = \cos t \implies g(t) = \sin t, \end{cases}$ in (c) con $\begin{cases} f(t) = 12t \implies f'(t) = 12, \\ g'(t) = \sin t \implies g(t) = -\cos t. \end{cases}$

(10) Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (t(-\sin t) + \cos t \cos t + 1) dt \stackrel{(a)}{=} \left[t \cos t - \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + t \right]_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{3}{2} 2\pi = 5\pi,$$

dove in (a) si sono usati i risultati $\int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = \sin t - t \cos t + C$, e $\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C$.

(11) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 1]$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (t^2 + t^2 - t) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(12) Una parametrizzazione della spezzata è $\gamma(t) = \begin{cases} (0, 0, t), & t \in [0, 1], \\ (0, t - 1, 1), & t \in [1, 2], \\ (t - 2, 1, 1), & t \in [2, 3]. \end{cases}$ Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 0 dt + \int_2^3 dt = 1.$$

□

Svolgimento esercizio 4

- (1) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x+y} = -\frac{x}{(x+y)^2} \neq \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x+y} = -\frac{y}{(x+y)^2}$, per cui ω non è chiusa.
- (2) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} x \log(1+xy) = \frac{x^2}{1+xy} \neq \frac{\partial}{\partial x} y \log(1+xy) = \frac{y^2}{1+xy}$, per cui ω non è chiusa.
- (3) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{4xy(1+x^2y^2)^2 - 8x^3y^3}{(1+x^2y^2)^4} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}$, per cui ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} \implies U(x, y) = \int \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} dx + \varphi(y) = -\frac{1}{1+x^2y^2} + \varphi(y)$, e deve essere $\frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = -\frac{1}{1+x^2y^2}$.
- (4) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (ye^x - e^y) = e^x - e^y = \frac{\partial}{\partial x} (e^x - xe^y)$, per cui ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = ye^x - e^y \implies U(x, y) = \int (ye^x - e^y) dx + \varphi(y) = ye^x - xe^y + \varphi(y)$, e deve essere $e^x - xe^y = \frac{\partial U}{\partial y} = e^x - xe^y + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = ye^x - xe^y$.
- (5) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (y \cos x - xy \sin x - \sin y) = \cos x - x \sin x - \cos y = \frac{\partial}{\partial x} (x \cos x - x \cos y + 1)$, per cui ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = y \cos x - xy \sin x - \sin y \implies U(x, y) = \int (y \cos x - xy \sin x - \sin y) dx + \varphi(y) = xy \cos x - x \sin y + \varphi(y)$, e deve essere $x \cos x - x \cos y + 1 = \frac{\partial U}{\partial y} = x \cos x - x \cos y + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 1$, e possiamo scegliere $\varphi(y) = y$. Quindi $U(x, y) = xy \cos x - x \sin y + y$.
- (6) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{y} - 2xy) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2)$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{y} - 2xy \implies U(x, y) = \int (\sqrt{y} - 2xy) dx + \varphi(y) = x\sqrt{y} - x^2y + \varphi(y)$, e deve essere $\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = x\sqrt{y} - x^2y$.
- (7) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} \frac{1+y}{1+x} = \frac{2}{1+x} = \frac{\partial}{\partial x} \log(1+x)$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1+y}{1+x} \implies U(x, y) = \int \frac{1+y}{1+x} dx + \varphi(y) = (1+y) \log(1+x) + \varphi(y)$, e deve essere $\log(1+x) = \frac{\partial U}{\partial y} = \log(1+x) + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = (1+y) \log(1+x)$.
- (8) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} e^{x/y} = -\frac{x}{y^2} e^{x/y} = \frac{\partial}{\partial x} (1 - \frac{x}{y}) e^{x/y}$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, che è semplicemente connesso (cioè le sue componenti connesse lo sono), e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = e^{x/y} \implies U(x, y) = \int e^{x/y} dx + \varphi(y) = ye^{x/y} + \varphi(y)$, e deve essere $(1 - \frac{x}{y}) e^{x/y} = \frac{\partial U}{\partial y} = (1 - \frac{x}{y}) e^{x/y} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = ye^{x/y}$.
- (9) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} (3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = 3 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{xy} = \frac{\partial}{\partial x} 3\sqrt{x^3y}$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, che è semplicemente connesso [cioè le sue componenti connesse lo sono], e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = 3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \implies U(x, y) = \int (3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx + \varphi(y) = 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{x} + \varphi(y)$, e deve essere $3\sqrt{x^3y} = \frac{\partial U}{\partial y} = 3\sqrt{x^3y} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{x}$.
- (10) Si ha $\frac{\partial}{\partial y} y \log(1+xy) = \log(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} = \frac{\partial}{\partial x} x \log(1+xy)$, per cui ω è chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$, che è semplicemente connesso (cioè le sue componenti connesse lo sono), e quindi ω è esatta. Determiniamo una funzione potenziale U . Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = y \log(1+xy) \implies U(x, y) = \int y \log(1+xy) dx + \varphi(y) =$

$(1 + xy)(\log(1 + xy) - 1) + \varphi(y)$, e deve essere $x \log(1 + xy) = \frac{\partial U}{\partial y} = x \log(1 + xy) + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x, y) = (1 + xy)(\log(1 + xy) - 1)$. $\square$

Svolgimento esercizio 5

- (1) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \log \frac{y}{x} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi ω è esatta in A , e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ . Poiché $\gamma(0) = (1, 2)$, $\gamma(1) = (e, 2)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino $\gamma_0(t) = (1 + (e - 1)t, 2)$, $t \in [0, 1]$. Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_0^1 2 \left(\log \frac{2}{1 + (e - 1)t} - 1 \right) (e - 1) dt = 2(e - 1) \log \frac{2}{e} - 2(e - 1) \int_0^1 \log(1 + (e - 1)t) dt \stackrel{(a)}{=} 2(e - 1) \log \frac{2}{e} - 2 \int_1^e \log x dx \stackrel{(b)}{=} 2(e - 1) \log \frac{2}{e} - [x \log x - x]_1^e = 2(e - 1) \log 2 - 2e$, dove in (a) si è usata la sostituzione $x = 1 + (e - 1)t \implies dx = (e - 1) dt$, e in (b) il risultato $\int \log x dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C$.
- (2) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = -15x^2 = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi ω è esatta in A , e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ . Poiché $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma(1) = (1, 1)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino $\gamma_0(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1], \\ (1, t - 1), & t \in [1, 2]. \end{cases}$ Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_0^1 t(16t^2 + 2) dt + \int_1^2 (3(t - 1)^2 - 5) dt = [4t^4 + t^2]_0^1 + [(t - 1)^3 - 5t]_1^2 = 1$.
- (3) Indichiamo con $\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 4xz = \frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial z} = 2y = \frac{\partial h}{\partial y}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^3$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi ω è esatta in A , e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ . Poiché $\gamma(0) = (1, 1, 0)$, $\gamma(1) = (e, 1, 2)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino $\gamma_0(t) = \begin{cases} (1, 1, 2t), & t \in [0, 1], \\ (e^{t-1}, 1, 2), & t \in [1, 2]. \end{cases}$ Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_0^1 (1 + 2t)2 dt + \int_1^2 (3e^{2(t-1)} + 1 + 8e^{t-1})e^{t-1} dt \stackrel{(a)}{=} [2t + 2t^2]_0^1 + \int_1^e (3x^2 + 8x + 1) dx = 4 + [x^3 + 4x^2 + x]_1^e = e^3 + 4e^2 - 1$, dove in (a) si è usata la sostituzione $x = e^{t-1} \implies dx = e^{t-1} dt$.
- (4) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y^3 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di una forma esatta $\omega_1 = x^3y^4 dx + x^4y^3 dy$ [perché chiusa in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso], e di una forma chiusa non necessariamente esatta $\omega_2 = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$. Si ha allora, $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t - \sin^2 t) dt = -2\pi$.
- (5) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-2)^2 - x^2}{(x^2 + (y-2)^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \setminus \{(0, 2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di una forma esatta

$\omega_1 = (\sqrt{y} - 2xy) dx + (\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2) dy$ [perché chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, che è semplicemente connesso], e di una forma chiusa non necessariamente esatta $\omega_2 = \frac{y-2}{x^2+(y-2)^2} dx - \frac{x}{x^2+(y-2)^2} dy$. Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t) = (\cos t, 2 + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma_0} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$.

(6) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x-2)^2-(y-2)^2}{((x-2)^2+(y-2)^2)^2} + \frac{9}{2}\sqrt{xy} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \setminus \{(2, 2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di una forma esatta $\omega_1 = (3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx + 3\sqrt{x^3y} dy$ [perché chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è semplicemente connesso], e di una forma chiusa non necessariamente esatta $\omega_2 = \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dx - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dy$. Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t) = (2 + \cos t, 2 + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma_0} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$.

(7) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x-2)^2-(y-2)^2}{((x-2)^2+(y-2)^2)^2} + e^x - e^y = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (2, 2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ è la somma di una forma esatta $\omega_1 = (ye^x - e^y) dx + (e^x - xe^y) dy$ [perché chiusa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è semplicemente connesso], e di due forme chiuse non necessariamente esatte $\omega_2 = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$, e $\omega_3 = \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dx - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} dy$. Osserviamo anche che la forma ω_3 è esatta in una regione semplicemente connessa contenente D , ad esempio in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\}$. Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 + \int_{\gamma} \omega_3 = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma_0} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$.

(8) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, ω non è chiusa. Appliciamo la formula di Gauss-Green, ottenendo $\int_{\partial^+ D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x}{(1+y)^2} - 2xy \right) dy = \int_0^1 \left[-\frac{x}{1+y} - xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 -\frac{x}{2} dx = \left[-\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}$.

(9) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, ω non è chiusa. Appliciamo la formula di Gauss-Green, ottenendo $\int_{\partial^- D} \omega = - \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} \left(y + \frac{1}{1+y^2} \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 + \arctg y \right]_{x-1}^{1-x} dx = \int_0^1 (\arctg(1-x) - \arctg(x-1)) dx \stackrel{(a)}{=} 2 \int_0^1 \arctg t dt = 2 \left[t \arctg t \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2} - \left[\log(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2$, dove in (a) si è usata la sostituzione $t = 1 - x$.

(10) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, ω

non è chiusa. Applichiamo la formula di Gauss-Green, ottenendo $\int_{\partial^+ D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = - \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 d\varrho = - \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^1 = - \frac{\pi}{8}.$

(11) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} - 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di due forme chiuse $\omega_1 = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} dy$, e $\omega_2 = \frac{-2y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2x}{x^2 + y^2} dy$. Calcoliamo i periodi di ω relativi alle due lacune $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Il periodo relativo alla lacuna $(0, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(a)}{=} \int_\gamma \omega_2 = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -4\pi$, dove in (a) si è usato il fatto che ω_1 è esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$.

Il periodo relativo alla lacuna $(1, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(b)}{=} \int_\gamma \omega_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$, dove in (b) si è usato il fatto che ω_2 è esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Quindi $\int_\gamma \omega = -4\pi + 2\pi = -2\pi$.

(12) Indichiamo con $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo che $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ è la somma di tre forme chiuse $\omega_1 = \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2} dx - \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} dy$, $\omega_2 = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, e $\omega_3 = -\frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$. Calcoliamo i periodi di ω relativi alle due lacune $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Il periodo relativo alla lacuna $(0, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(a)}{=} \int_\gamma (\omega_2 + \omega_3) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$, dove in (a) si è usato il fatto che ω_1 è esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$.

Il periodo relativo alla lacuna $(1, 0)$ si calcola, ad esempio, usando la curva $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e vale $\int_\gamma \omega \stackrel{(b)}{=} \int_\gamma \omega_1 = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -4\pi$, dove in (b) si è usato il fatto che ω_2 e ω_3 sono esatte in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Quindi $\int_\gamma \omega = -2\pi + 4\pi = 2\pi$.

□