Analisi Matematica II
Integrali curvilinei

Esercizio 1. Calcolare la lunghezza delle seguenti curve, descritte con equazioni parametriche, o come grafici di funzioni

(1) $\gamma(t) = \big(t^3, t^2\big)$, $t \in [0,1]$,

(2) $\gamma(t) = \big(\arccos t, \log t\big)$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,

(3) $\gamma(t) = \big(e^t - 1, e^{2t} + 1\big)$, $t \in [0,1]$,

(4) $\gamma(t) = \big(3t^2 + 10t, 4t^2 + 5t\big)$, $t \in [-1,1]$,

(5) $\gamma(t) = \big(t, \sqrt{8t}, \log t\big)$, $t \in [1,2]$,

(6) $\gamma(t) = \big(\frac{1}{4}\cos 2t, \cos^3 t, \sin^3 t\big)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(7) $\gamma(t) = \big(4\cos t - \cos 4t, 4\sin t - \sin 4t\big)$, $t \in [0, 2\pi]$,

(8) $\gamma(t) = \big(\cosh t \cos t, \cosh t \sin t, t\big)$, $t \in [0,1]$.

(9) $y = (3+2x)^{3/2}$, $x \in [0,2]$,

(10) $y = \log\cos x$, $x \in \Big[0, \frac{\pi}{3}\Big]$,

(11) $y = \sqrt{1+2x}$, $x \in \Big[0, \frac{3}{2}\Big]$,

(12) $y = \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}$, $x \in [0,5]$,

(13) $y = x^2$, $x \in [1,2]$,

(14) $y = x + \frac{2}{3}x^{3/2}$, $x \in [0,1]$,

(15) [spirale logaritmica] $\varrho(\vartheta) = e^{3\vartheta}$, $\vartheta \in [0,1]$.

(16) [spirale di Archimede] $\varrho(\vartheta) = 2\vartheta$, $\vartheta \in [0,1]$,

Esercizio 2. Calcolare $\int_\gamma f\, ds$, dove

(1) $f(x,y) = \sin x + \cos y$ e $\gamma(t) = (\pi t, 2\pi t)$, $t \in [0,1]$,

(2) $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$,

(3) $f(x,y) = x^2 y$ e $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [\pi/2, \pi]$,

(4) $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$,

(5) $f(x,y) = x^3 + y$ e $\gamma(t) = (2t, t^3)$, $t \in [0,1]$,

(6) $f(x,y,z) = z$ e $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

(7) $f(x,y,z) = \sqrt{z}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0,1]$,

(8) $f(x,y) = \sqrt{x+2y}$ e γ è il segmento di $\mathbb{R}^2$ congiungente i punti $(1,2)$ e $(3,6)$,

(9) $f(x,y) = x^2$ e γ è il grafico della funzione $y = \log x$, $x \in [1,2]$,

(10) $f(x,y) = y^2$ e γ è il grafico della funzione $y = e^x$, $x \in [0, \log 2]$,

(11) $f(x,y) = y$ e γ è il grafico della funzione $y = \sqrt{1+x^2}$, $x \in [0,1]$,

(12) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e γ è la curva di equazione polare $\varrho(\vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in [0,1]$.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove

(1) $\omega(x,y) = y\,dx - x\sqrt{y}\,dy$, e γ è il segmento che congiunge i punti $(1,0)$ e $(2,2)$,

(2) $\omega(x,y) = y^2\,dx + e^x\,dy$, e γ è il segmento che congiunge i punti $(1,0)$ e $(2,2)$,

(3) $\omega(x,y) = x\log y\,dx - y\,\mathrm{arctg}\,x\,dy$, e γ è il segmento che congiunge i punti $(1,1)$ e $(3,3)$,

(4) $\omega(x,y) = y\sqrt{x}\,dx - xe^y\,dy$, e γ è il segmento di estremi $(0,0)$ e $(1,1)$,

(5) $\omega(x,y) = \frac{1}{(1+x)^2}\,dx - \frac{1}{(1+y)^2}\,dy$, e γ è la spezzata di vertici $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,

(6) $\omega(x,y) = yx^2\,dx + x\,dy$, e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$,

(7) $\omega(x,y) = y^2e^x\,dx - xy\,dy$, e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$,

(8) $\omega(x,y) = x\sqrt{1-y}\,dx + x\,dy$, e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$,

(9) $\omega(x,y) = x\sin\sqrt{y}\,dx + y\sin x\,dy$, e $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,\pi]$,

(10) $\omega(x,y,z) = z\,dx + x\,dy + \,dz$, e $\gamma(t) = \big(\cos t, \sin t, t\big)$, $t \in [0,2\pi]$,

(11) $\omega(x,y,z) = xy\,dx + yz\,dy - z\,dz$, e γ è il segmento di estremi $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$,

(12) $\omega(x,y,z) = z\,dx + x\,dy + y\,dz$, e γ è la spezzata di vertici $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$.

Esercizio 4. Verificare se le 1-forme differenziali seguenti sono esatte (nel loro insieme di definizione), e, in caso affermativo, trovarne le primitive (cioè, una funzione potenziale).

(1) $\omega(x,y) = \dfrac{x}{x+y}\,dx + \dfrac{y}{x+y}\,dy$,

(2) $\omega(x,y) = x\log(1+xy)\,dx + y\log(1+xy)\,dy$,

(3) $\omega(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\,dx + \dfrac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}\,dy$,

(4) $\omega(x,y) = (ye^x - e^y)\,dx + (e^x - xe^y)\,dy$,

(5) $\omega(x,y) = (y\cos x - xy\sin x - \sin y)\,dx + (x\cos x - x\cos y + 1)\,dy$,

(6) $\omega(x,y) = (\sqrt{y} - 2xy)\,dx + \Big(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\Big)\,dy$,

(7) $\omega(x,y) = \dfrac{1+y}{1+x}\,dx + \log(1+x)\,dy$,

(8) $\omega(x,y) = e^{x/y}\,dx + \Big(1 - \dfrac{x}{y}\Big)e^{x/y}\,dy$,

(9) $\omega(x,y) = \Big(3\sqrt{xy^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx + 3\sqrt{x^3y}\,dy$,

(10) $\omega(x,y) = y\log(1+xy)\,dx + x\log(1+xy)\,dy$.

Esercizio 5. Calcolare gli integrali curvilinei seguenti

(1) $\displaystyle\int_\gamma y\Big(\log\frac{y}{x}-1\Big)\,dx + x\Big(\log\frac{y}{x}+1\Big)\,dy$, dove $\gamma(t)=\big(e^t, 2+\sin 2\pi t\big)$, $t\in[0,1]$,

(2) $\displaystyle\int_\gamma x(16x^2-15xy+2)\,dx+(3y^2-5x^3)\,dy$, dove $\gamma(t)=\big(t^3+t^2-t, t^3-t^2+\sin\frac{\pi}{2}t\big)$, $t\in[0,1]$,

(3) $\displaystyle\int_\gamma (3x^2+y^2+2xz^2)\,dx+2y(x+z)\,dy+(y^2+2x^2z)\,dz$, dove $\gamma(t)=\big(e^t, 1+\sin 2\pi t, t^2+t\big)$, $t\in[0,1]$,

(4) $\displaystyle\int_\gamma \Big(x^3y^4-\frac{y}{x^2+y^2}\Big)\,dx+\Big(x^4y^3+\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\,dy$, dove $\gamma(t)=\big(\sin t, \cos t\big)$, $t\in[0,2\pi]$,

(5) $\displaystyle\int_{\partial^+D}\Big(\frac{y-2}{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{y}-2xy\Big)\,dx+\Big(\frac{x}{2\sqrt{y}}-x^2-\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\Big)\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 3\}$,

(6) $\displaystyle\int_{\partial^+D}\Big(\frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}+3\sqrt{xy^3}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx+\Big(3\sqrt{x^3y}-\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\Big)\,dy$, dove $D=[1,3]^2$,

(7) $\displaystyle\int_{\partial^+D}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}+ye^x-e^y\Big)\,dx+\Big(e^x-xe^y-\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}-\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\sqrt{4-4x^2}\le y\le \cos(\frac{\pi}{2}x), -1\le x\le 1\}$,

(8) $\displaystyle\int_{\partial^+D}\frac{x}{1+y}\,dx-(\sin y+x^2y)\,dy$, dove $D=[0,1]^2$,

(9) $\displaystyle\int_{\partial^-D}\operatorname{arctg} y\,dx-xy\,dy$, dove D è il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$,

(10) $\displaystyle\int_{\partial^+D}(x^3+x^2y)\,dx+(y^3-y^2x)\,dy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\big\}$,

(11) $\displaystyle\int_\gamma \Big(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\Big)\,dx+\Big(\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\Big)\,dy$, dove γ è la circonferenza $x^2+y^2=9$, percorsa in senso antiorario,

(12) $\displaystyle\int_\gamma \Big(\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}-\frac{y+x}{x^2+y^2}\Big)\,dx+\Big(\frac{x-y}{x^2+y^2}-\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\Big)\,dy$, dove γ è l'ellisse $x^2+4y^2=4$, percorsa in senso orario.