Analisi Matematica II
Integrali superficiali (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Poniamo $\Phi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva, in quanto $\Phi(x,y) = \Phi(x',y') \implies (x,y) = (x',y')$. Inoltre, rango $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \end{pmatrix} =$ rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} =$ 2. Infine, Φ è evidentemente suriettiva, cioè la sua immagine è il grafico della funzione $z = x^2 + y^2$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un paraboloide ellitico].

(2) Poniamo $\Phi(x,y) = (x, y, x^2 - y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva, in quanto $\Phi(x,y) = \Phi(x',y') \implies (x,y) = (x',y')$. Inoltre, rango $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \end{pmatrix} =$ rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & -2y \end{pmatrix} =$ 2. Infine, Φ è evidentemente suriettiva, cioè la sua immagine è il grafico della funzione $z = x^2 - y^2$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un paraboloide iperbolico].

(3) Poniamo $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, 2\pi)$, $\Phi(z, \vartheta) = (z \cos\vartheta, \frac{1}{2} z \sin\vartheta, z)$, $(z,\vartheta) \in \overline{A} = \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A, in quanto se $(z_1, \vartheta_1), (z_2, \vartheta_2) \in A$, si ha $\Phi(z_1, \vartheta_1) = \Phi(z_2, \vartheta_2) \implies$ $\begin{cases} z_1 = z_2 \\ \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_2 \end{cases} \implies (z_1, \vartheta_1) = (z_2, \vartheta_2)$. Inoltre, $\Phi_z \wedge \Phi_\vartheta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos\vartheta & \frac{1}{2}\sin\vartheta & 1 \\ -z\sin\vartheta & \frac{1}{2} z\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} z\cos\vartheta\, \vec{\imath} - z\sin\vartheta\, \vec{\jmath} + \frac{1}{2} z\, \vec{k} \neq 0$, se $(z,\vartheta) \in A$. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tale che $z^2 = x^2 + 4y^2$, si ha $\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{z} \\ \sin\vartheta = \frac{2y}{z}, \end{cases}$ che individuano univocamente $\vartheta \in [0, 2\pi]$, per cui $\Phi(z,\vartheta) = (x,y,z)$; mentre, $\Phi(0,\vartheta) = (0,0,0)$, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un cono ellittico].

(4) Poniamo $A = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, $\Phi(z,\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, z)$, $(z,\vartheta) \in \overline{A} = \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A, in quanto se $(z_1, \vartheta_1), (z_2, \vartheta_2) \in A$, si ha $\Phi(z_1, \vartheta_1) = \Phi(z_2, \vartheta_2) \implies$ $\begin{cases} z_1 = z_2 \\ \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_2 \end{cases} \implies (z_1, \vartheta_1) = (z_2, \vartheta_2)$. Inoltre, $\Phi_z \wedge \Phi_\vartheta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = -\cos\vartheta\, \vec{\imath} - \sin\vartheta\, \vec{\jmath} \neq 0$, se $(z,\vartheta) \in A$. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x^2 + y^2 = 1$, si ha $\begin{cases} \cos\vartheta = x \\ \sin\vartheta = y, \end{cases}$ che individuano univocamente $\vartheta \in [0, 2\pi]$, per cui $\Phi(z,\vartheta) = (x,y,z)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un cilindro rotondo].

(5) Poniamo $A = \mathbb{R}^2$, $\Phi(z,t) = (\cosh t, \sinh t, z)$, $(z,t) \in \overline{A} = \mathbb{R}^2$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A, in quanto se $(z_1, t_1), (z_2, t_2) \in A$, si ha $\Phi(z_1, t_1) = \Phi(z_2, t_2) \implies \begin{cases} z_1 = z_2 \\ \cosh t_1 = \cosh t_2 \\ \sinh t_1 = \sinh t_2 \end{cases} \implies$

$(z_1,t_1)=(z_2,t_2)$. Inoltre, $\Phi_z\wedge\Phi_t = \begin{vmatrix} \vec\imath & \vec\jmath & \vec k \\ 0 & 0 & 1 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \end{vmatrix} = -\cosh t\,\vec\imath + \sinh t\,\vec\jmath \neq 0$, se $(z,t)\in A$. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tale che $x^2-y^2=1$, $x>0$, si ha $\begin{cases}\cosh t = x\\ \sinh t = y,\end{cases}$ che individuano univocamente $t\in\mathbb{R}$, per cui $\Phi(z,t)=(x,y,z)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [una falda di un cilindro iperbolico].

(6) Poniamo $A := (0,2\pi)\times(0,\pi)$, $\Phi(\vartheta,\varphi) = (3\cos\vartheta\sin\varphi, 3\sin\vartheta\sin\varphi, 1+3\cos\varphi)$, $(\vartheta,\varphi)\in\overline{A} = [0,2\pi]\times[0,\pi]$. Allora $\Phi\in C^1(\overline{A};\mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A, in quanto se $(\vartheta_1,\varphi_1),(\vartheta_2,\varphi_2)\in A$, si ha $\Phi(\vartheta_1,\varphi_1)=\Phi(\vartheta_2,\varphi_2) \implies \begin{cases}\cos\vartheta_1=\cos\vartheta_2\\ \sin\vartheta_1=\sin\vartheta_2\\ \cos\varphi_1=\cos\varphi_2\end{cases} \implies (\vartheta_1,\varphi_1)=(\vartheta_2,\varphi_2)$. Inoltre, $\Phi_\vartheta\wedge\Phi_\varphi = \begin{vmatrix} \vec\imath & \vec\jmath & \vec k \\ -3\sin\varphi\sin\vartheta & 3\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \\ 3\cos\varphi\cos\vartheta & 3\cos\varphi\sin\vartheta & -3\sin\varphi \end{vmatrix} = -9\sin^2\varphi\cos\vartheta\,\vec\imath - 9\sin^2\varphi\sin\vartheta\,\vec\jmath - 9\sin\varphi\cos\varphi\,\vec k \neq 0$, in A. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,4),(0,0,-2)\}$ tale che $x^2+y^2+(z-1)^2=9$, si ha $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{3}(z-1)\\ \cos\vartheta=\frac{x}{\sqrt{9-(z-1)^2}}\\ \sin\vartheta=\frac{y}{\sqrt{9-(z-1)^2}},\end{cases}$ che individuano univocamente $\varphi\in(0,\pi)$, e $\vartheta\in[0,2\pi]$, per cui $\Phi(\vartheta,\varphi)=(x,y,z)$; mentre, per ogni $\vartheta\in[0,2\pi]$, $\Phi(\vartheta,0)=(0,0,4)$, $\Phi(\vartheta,\pi)=(0,0,-2)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [una sfera].

(7) Poniamo $A := (0,2\pi)\times(0,\pi)$, $\Phi(\vartheta,\varphi) = (2\cos\vartheta\sin\varphi, 1+\sin\vartheta\sin\varphi, \frac{2}{3}\cos\varphi)$, $(\vartheta,\varphi)\in\overline{A} = [0,2\pi]\times[0,\pi]$. Allora $\Phi\in C^1(\overline{A};\mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A, in quanto se $(\vartheta_1,\varphi_1),(\vartheta_2,\varphi_2)\in A$, si ha $\Phi(\vartheta_1,\varphi_1)=\Phi(\vartheta_2,\varphi_2) \implies \begin{cases}\cos\vartheta_1=\cos\vartheta_2\\ \sin\vartheta_1=\sin\vartheta_2\\ \cos\varphi_1=\cos\varphi_2\end{cases} \implies (\vartheta_1,\varphi_1)=(\vartheta_2,\varphi_2)$. Inoltre, $\Phi_\vartheta\wedge\Phi_\varphi = \begin{vmatrix} \vec\imath & \vec\jmath & \vec k \\ -2\sin\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & 0 \\ 2\cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & -\frac{2}{3}\sin\varphi \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\sin^2\varphi\cos\vartheta\,\vec\imath - \frac{4}{3}\sin^2\varphi\sin\vartheta\,\vec\jmath - 2\sin\varphi\cos\varphi\,\vec k \neq 0$, in A. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,\pm\frac{2}{3})\}$ tale che $x^2+4(y-1)^2+9z^2=1$, si ha $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{3}{2}z\\ \cos\vartheta=\frac{x}{\sqrt{4-9z^2}}\\ \sin\vartheta=\frac{2(y-1)}{\sqrt{4-9z^2}},\end{cases}$ che individuano univocamente $\varphi\in(0,\pi)$, e $\vartheta\in[0,2\pi]$, per cui $\Phi(\vartheta,\varphi)=(x,y,z)$; mentre, per ogni $\vartheta\in[0,2\pi]$, $\Phi(\vartheta,0)=(0,0,\frac{2}{3})$, $\Phi(\vartheta,\pi)=(0,0,-\frac{2}{3})$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un'ellisse].

(8) Poniamo $A := (0,2\pi)\times(0,+\infty)$, $\Phi(\vartheta,t) = (\cos\vartheta\sinh t, \frac{1}{2}\sin\vartheta\sinh t, -\frac{1}{3}\cosh t)$, $(\vartheta,t)\in\overline{A} = [0,2\pi]\times[0,+\infty)$. Allora $\Phi\in C^1(\overline{A};\mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A, in quanto se $(\vartheta_1,t_1),(\vartheta_2,t_2)\in A$, si ha $\Phi(\vartheta_1,t_1)=\Phi(\vartheta_2,t_2) \implies \begin{cases}\cos\vartheta_1\sinh t_1=\cos\vartheta_2\sinh t_2\\ \sin\vartheta_1\sinh t_1=\sin\vartheta_2\sinh t_2\\ \cosh t_1=\cosh t_2\end{cases} \implies t_1=t_2$, e quindi $\vartheta_1=\vartheta_2$.

Inoltre, $\Phi_\vartheta \wedge \Phi_t = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -\sin\vartheta\sinh t & \frac{1}{2}\cos\vartheta\sinh t & 0 \\ \cos\vartheta\cosh t & \frac{1}{2}\sin\vartheta\cosh t & -\frac{1}{3}\sinh t \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\sinh^2 t\cos\vartheta\ \vec{\imath} - \frac{1}{3}\sinh^2 t\sin\vartheta\ \vec{\jmath} - \frac{1}{2}\sinh t\cosh t\ \vec{k} \neq 0$, in A. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = -1$, $z < 0$, si ha $\begin{cases} \cosh t = -3z \\ \cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{9z^2-1}} \\ \sin\vartheta = \frac{2y}{\sqrt{9z^2-1}}, \end{cases}$ che individuano univocamente $t > 0$, e $\vartheta \in [0, 2\pi]$, per cui $\Phi(\vartheta, \varphi) = (x,y,z)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [una falda di un iperboloide ellittico].

(9) Poniamo $A := (0,2\pi) \times (0,+\infty)$, $\Phi(\vartheta,t) = (1+\cos\vartheta\cosh t, \sin\vartheta\cosh t, \sinh t)$, $(\vartheta,t) \in \overline{A} = [0,2\pi] \times [0,+\infty)$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A};\mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A, in quanto se $(\vartheta_1,t_1),(\vartheta_2,t_2) \in A$, si ha $\Phi(\vartheta_1,t_1) = \Phi(\vartheta_2,t_2) \implies \begin{cases} \cos\vartheta_1\cosh t_1 = \cos\vartheta_2\cosh t_2 \\ \sin\vartheta_1\cosh t_1 = \sin\vartheta_2\cosh t_2 \\ \sinh t_1 = \sinh t_2 \end{cases} \implies t_1 = t_2$, e quindi $\vartheta_1 = \vartheta_2$. Inoltre, $\Phi_\vartheta \wedge \Phi_t = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -\sin\vartheta\cosh t & \cos\vartheta\cosh t & 0 \\ \cos\vartheta\sinh t & \sin\vartheta\sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t\cos\vartheta\ \vec{\imath} + \cosh^2 t\sin\vartheta\ \vec{\jmath} - \sinh t\cosh t\ \vec{k} \neq 0$, in A. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$, si ha $\begin{cases} \sinh t = z \\ \cos\vartheta = \frac{x-1}{\sqrt{1+z^2}} \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, \end{cases}$ che individuano univocamente $t > 0$, e $\vartheta \in [0,2\pi]$, per cui $\Phi(\vartheta,\varphi) = (x,y,z)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un iperboloide iperbolico].

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Osserviamo che $P_0 = (1,1,1) = \Phi(1,1)$, per cui $\Phi_u(1,1) = (1,0,v)|_{(1,1)} = (1,0,1)$, e $\Phi_v(1,1) = (0,1,u)|_{(1,1)} = (0,1,1)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1,1) \wedge \Phi_v(1,1) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1-\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = -(x-1) - (y-1) + (z-1) \iff z = x + y - 1$.

(2) Osserviamo che $P_0 = (1,1,1) = \Phi(1,0)$, per cui $\Phi_u(1,0) = (1,1,2u)|_{(1,0)} = (1,1,2)$, e $\Phi_v(1,0) = (1,-1,2v)|_{(1,0)} = (1,-1,0)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1,0) \wedge \Phi_v(1,0) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1+2\lambda, 1+2\lambda, 1-2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = 2(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) \iff z = x + y - 1$.

(3) Osserviamo che $P_0 = (1,1,0) = \Phi(1,0)$, per cui $\Phi_u(1,0) = (2u, 2u, v)|_{(1,0)} = (2,2,0)$, e $\Phi_v(1,0) = (2v, -2v, u)|_{(1,0)} = (0,0,1)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1,0) \wedge \Phi_v(1,0) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1+2\lambda, 1-2\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = 2(x-1) + 2(y-1) \iff x - y = 0$.

(4) Osserviamo che $P_0 = (1,0,0) = \Phi(0,0)$, per cui $\Phi_u(0,0) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)|_{(0,0)} = (0,0,1)$, e $\Phi_v(0,0) = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)|_{(0,0)} = (0,1,0)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1,0) \wedge \Phi_v(1,0) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{\imath}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1-\lambda, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = -(x-1) \iff x - 1 = 0$.

(5) Osserviamo che $P_0 = (1,1,0) = \Phi(1,0)$, per cui $\Phi_u(1,0) = (2u\cos v, 1, 2u \sin v)|_{(1,0)} = (2,1,0)$, e $\Phi_v(1,0) = (-u^2 \sin v, 0, u^2 \cos v)|_{(1,0)} = (0,0,1)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1,0) \wedge \Phi_v(1,0) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1+\lambda, 1-2\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = (x-1) - 2(y-1) \iff x - 2y + 1 = 0$.

(6) Osserviamo che $P_0 = (1,0,0)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (2x, 2y, 2z)|_{(1,0,0)} = 2\vec{\imath}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1+2\lambda, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = 2(x-1) \iff x - 1 = 0$.

(7) Osserviamo che $P_0 = (1,1,1)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (2x, 2y, -2z)|_{(1,1,1)} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1+2\lambda, 1+2\lambda, 1-2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = 2(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) \iff z = x + y - 1$.

(8) Osserviamo che $P_0 = (1,0,0)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (2x, 2y, 0)|_{(1,0,0)} = 2\vec{\imath}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1+2\lambda, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = 2(x-1) \iff x - 1 = 0$.

(9) Osserviamo che $P_0 = (1,0,1)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (-2x, -2y, 1)|_{(1,0,1)} = -2\vec{\imath} + \vec{k}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1-2\lambda, 0, 1+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0)\rangle = -2(x-1) + (z-1) \iff z = 2x - 1$.

$\square$

Svolgimento esercizio 3

(1) La superficie proposta è il grafico di una funzione f di dominio $D = [1,2]^2$, per cui

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}}\, dxdy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D \Big(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\Big)\, dxdy \overset{(a)}{=} \sqrt{2} \int_1^2 dx \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy \\
&= \sqrt{2}\Big[\frac{2}{3} x^{3/2}\Big]_1^2 \cdot \Big[2\sqrt{y}\Big]_1^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = \frac{4}{3}(5\sqrt{2}-6),
\end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

(2) La superficie proposta è il grafico di una funzione f di dominio $D = [0,1]^2$, per cui

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{2 + 4y^2}\, dy \\
&\overset{(a)}{=} \sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{z^2+1}{2z} \frac{z^2+1}{2\sqrt{2}z^2}\, dz = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \Big(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\Big)\, dz \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{z^2}{2} + 2\log|z| - \frac{1}{2z^2}\Big]_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,),
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sqrt{1+2y^2} = z - \sqrt{2}y \implies y = \frac{z^2-1}{2\sqrt{2}z}$, $dy = \frac{z^2+1}{2\sqrt{2}z^2}\, dz$, e $\sqrt{1+2y^2} = \frac{z^2+1}{2z}$.

(3) La superficie proposta è il grafico di una funzione f di dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, |y| \le x\}$, per cui

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}}\, dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1 + \frac{1}{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\vartheta \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\varrho^2}}\, \varrho d\varrho = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \sqrt{\varrho^2+1}\, d\varrho \\
&\overset{(a)}{=} \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{z^2+1}{2z} \frac{z^2+1}{2z^2}\, dz = \frac{\pi}{8} \int_1^2 \Big(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\Big)\, dz \\
&= \frac{\pi}{8}\Big[\frac{z^2}{2} + 2\log|z| - \frac{1}{2z^2}\Big]_1^2 = \frac{\pi}{8}\Big(\frac{15}{8} + 2\log 2\Big),
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sqrt{1+\varrho^2} = z - \varrho \implies \varrho = \frac{z^2-1}{2z}$, $d\varrho = \frac{z^2+1}{2z^2}\, dz$, e $\sqrt{1+\varrho^2} = \frac{z^2+1}{2z}$.

(4) Osserviamo che $\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v & 1 & 1 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{\jmath} + (u+v)\vec{\jmath} - (u-v)\vec{k}$, per cui $\|\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\|^2 = 4 + (u+v)^2 + (u-v)^2 = 4 + 2u^2 + 2v^2$, e quindi, posto $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 1, u \ge 0, v \ge 0\}$, si ha

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= \iint_D \|\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\|\, dudv = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{4 + 2\varrho^2}\, \varrho d\varrho \\
&\overset{(a)}{=} \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} \int_4^6 \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{8}\Big[\frac{2}{3} t^{3/2}\Big]_4^6 = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{6} - 4),
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $4+2\varrho^2=t \implies 4\varrho d\varrho = dt$.

(5) Osserviamo che $\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos v & 0 & 0 \\ -u\sin v & 1 & -\sin v \end{vmatrix} = \sin v\cos v\vec{\jmath} + \cos v\vec{k}$, per cui $\|\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v)\|^2 = \sin^2 v\cos^2 v + \cos^2 v = \cos^2 v(1+\sin^2 v)$, e quindi, posto $D=[0,1]\times[0,\pi]$, si ha

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= \iint_D \|\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v)\|\,dudv = \int_0^1 du\int_0^\pi |\cos v|\sqrt{1+\sin^2 v}\,dv \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\cos v\sqrt{1+\sin^2 v}\,dv \overset{(a)}{=} 2\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt \overset{(b)}{=} 2\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{z^2+1}{2z}\,\frac{z^2+1}{2z^2}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}}\Big(z+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}\Big)\,dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{z^2}{2}+2\log z-\frac{1}{2z^2}\Big]_1^{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sin v = t \implies \cos v\,dv = dt$, e in (b) il cambiamento di variabile $\sqrt{1+t^2}=z-t \implies t=\frac{z^2-1}{2z}$, $dt=\frac{z^2+1}{2z^2}\,dz$, e $\sqrt{1+t^2}=\frac{z^2+1}{2z}$.

(6) Osserviamo che $\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{1}{u} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{v} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}\vec{\imath} + \frac{1}{uv}\vec{k}$, per cui $\|\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v)\|^2 = \frac{1}{v^2}+\frac{1}{u^2v^2} = \frac{1}{v^2}(1+\frac{1}{u^2})$, e quindi, posto $D=[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]\times[1,e]$, si ha

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= \iint_D \|\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v)\|\,dudv = \int_{3/4}^{4/3} du\int_1^e \frac{1}{v}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\,dv \\
&= \int_{3/4}^{4/3}\Big[\log v\Big]_1^e\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}\,du \overset{(a)}{=} \int_2^3 \frac{z^2+1}{2z}\,\frac{2z}{z^2-1}\,\frac{z^2+1}{2z^2}\,dz \\
&\overset{(b)}{=} \frac{1}{2}\int_2^3\Big(1-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z-1}-\frac{2}{z+1}\Big)\,dz = \frac{1}{2}\Big[z+\frac{1}{z}+2\log|z-1|-2\log|z+1|\Big]_2^3 = \frac{5}{12}+\log 3,
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sqrt{1+u^2}=z-u \implies u=\frac{z^2-1}{2z}$, $du=\frac{z^2+1}{2z^2}\,dz$, e $\sqrt{1+u^2}=\frac{z^2+1}{2z}$, e in (b) la decomposizione $\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2-1)} = 1-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z-1}-\frac{2}{z+1}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x,y)=(x,y,\frac{1}{2}x^2+y^2)$, $(x,y)\in D$, per cui $\Phi_x(x,y)\wedge\Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -x\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath} + \vec{k}$, e $\|\Phi_x(x,y)\wedge\Phi_y(x,y)\|^2 = x^2+4y^2+1$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_S y^2\,d\sigma &= \iint_D y^2\sqrt{1+x^2+4y^2}\,dxdy \overset{(a)}{=} \int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^1 \frac{1}{4}\varrho^2\sin^2\vartheta\sqrt{1+\varrho^2}\,\frac{1}{2}\varrho d\varrho \\
&\overset{(b)}{=} \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\,d\vartheta\int_1^2 (z-1)\sqrt{z}\cdot\frac{1}{2}dz = \frac{1}{32}\Big[\frac{1}{2}\vartheta-\frac{1}{4}\sin 2\vartheta\Big]_0^{2\pi}\cdot\Big[\frac{2}{5}z^{5/2}-\frac{2}{3}z^{3/2}\Big]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{120}(\sqrt{5}+1),
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\frac{1}{2}\varrho\sin\vartheta$, e in (b) il cambiamento di variabile $z=1+\varrho^2 \implies dz=2\varrho\, d\varrho$.

(2) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$, $(x,y)\in D$, per cui $\Phi_x(x,y)\wedge\Phi_y(x,y)=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix}=-2x\vec{\imath}-2y\vec{\jmath}+\vec{k}$, e $\|\Phi_x(x,y)\wedge\Phi_y(x,y)\|^2=4x^2+4y^2+1$. Allora

$$\begin{aligned}\int_S \frac{x}{\sqrt{4z+1}}\,d\sigma &= \iint_D \frac{x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy \overset{(a)}{=} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\vartheta\int_0^{1/2}\varrho\cos\vartheta\,\varrho d\varrho\\ &= \Big[\sin\vartheta\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2}\cdot\Big[\frac{1}{3}\varrho^3\Big]_0^{1/2}=-\frac{1}{12},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$.

(3) Osserviamo che $\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \cos v & 0 & 0\\ -u\sin v & 1 & -\sin v\end{vmatrix}=\sin v\cos v\vec{\jmath}+\cos v\vec{k}$, e $\|\Phi_u(u,v)\wedge\Phi_v(u,v)\|^2=\sin^2 v\cos^2 v+\cos^2 v=\cos^2 v(1+\sin^2 v)$. Posto $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\le u\le\frac{\pi}{2}, 0\le v\le u\}$, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}}\,d\sigma &= \iint_D \frac{u\cos v}{\sqrt{1+\sin^2 v}}\cos v\sqrt{1+\sin^2 v}\,dxdy=\int_0^{\pi/2} u\,du\int_0^u \frac{1+\cos 2v}{2}\,dv\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} u\Big[v+\frac{1}{2}\sin 2v\Big]_{v=0}^{v=u} du=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} u\Big(u+\frac{1}{2}\sin 2u\Big)\,du\\ &=\frac{1}{6}\Big[u^3\Big]_0^{\pi/2}+\frac{1}{4}\Big[u\frac{-\cos 2u}{2}\Big]_0^{\pi/2}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2u}{2}\,du\\ &=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{16}+\frac{1}{16}\Big[\sin 2\vartheta\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{16},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$.

(4) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$, per cui $\Phi_x(x,y)\wedge\Phi_y(x,y)=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{vmatrix}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\imath}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\jmath}+\vec{k}$, e $\|\Phi_x(x,y)\wedge\Phi_y(x,y)\|^2=2$. Allora

$$\begin{aligned}\int_S (x^2+y^2)\,d\sigma &= \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \overset{(a)}{=} \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 \varrho^2\,\varrho d\varrho\\ &=2\sqrt{2}\pi\Big[\frac{1}{4}\varrho^4\Big]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x,y) = (x,y,1-x-y)$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Poiché $\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle y(1-x-y)\vec{\imath} + x(1-x-y)\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}, \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\rangle = (x+y)(1-x-y)+xy$, e quindi si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma &= -\iint_D \vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy = -\iint_D \big(x+y-x^2-y^2-xy\big)\, dxdy \\ &= \int_0^1 \Big[x^2y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}xy^2 - xy - \frac{1}{2}y^2\Big]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \Big(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 + \frac{1}{2}x(1-x)^2 - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\Big)\, dx \\ &= \int_0^1 \Big(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3\Big)\, dx = \Big[-\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{24}x^4\Big]_0^1 = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(2) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2\}$. Poiché $\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2x\,\vec{\imath} - 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione positiva. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle 2y\vec{\imath} + 2x\vec{\jmath} + 3y\vec{k}, -2x\,\vec{\imath} - 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k}\rangle = -8xy + 3y$, e quindi si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_D \vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy = \iint_D \big(-8xy + 3y\big)\, dxdy \overset{(a)}{=} 0,$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

(3) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$. Poiché $\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2x\,\vec{\imath} - 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle xy\vec{\imath} + x(x^2+y^2)\vec{\jmath} + (1+x^2y+y^3)\vec{k}, -2x\,\vec{\imath} - 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k}\rangle = -2xy^2 - 2xy(x^2+y^2) + 1 + x^2y + y^3$, e quindi si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma &= -\iint_D \vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy \\ &= \iint_D \big(2xy^2 + 2xy(x^2+y^2) - 1 - x^2y - y^3\big)\, dxdy \overset{(a)}{=} -\operatorname{area}(D) = -4\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

(4) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x,y) = (x,y,1-x^2-y^2)$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Poiché $\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\,\vec{\imath} + 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$, e $\Phi_x(0,0) \wedge \Phi_y(0,0) = \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + (1-x^2-y^2)\vec{k}, 2x\,\vec{\imath} + 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k}\rangle =$

$2x^3+2y^3+1-x^2-y^2$, e quindi si ha

$$\int_S \vec F\cdot\vec\nu\,d\sigma = -\iint_D \vec F(\Phi(x,y))\cdot\Phi_x(x,y)\wedge\Phi_y(x,y)\,dxdy = -\iint_D \big(2x^3+2y^3-x^2-y^2+1\big)\,dxdy$$
$$\overset{(a)}{=} -\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 (1-\varrho^2)\,\varrho\,d\varrho = -2\pi\Big[\frac12\varrho^2-\frac14\varrho^4\Big]_0^1 = -\frac{\pi}{2},$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio, e il cambiamento di variabile $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$.

(5) Una parametrizzazione di S è $\Phi(\vartheta,\varphi)=(\cos\vartheta\sin\varphi,\sin\vartheta\sin\varphi,\cos\varphi)$, $(\vartheta,\varphi)\in D:=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. Poiché $\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\wedge\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi)=\begin{vmatrix}\vec\imath & \vec\jmath & \vec k\\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & 0\\ \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi\end{vmatrix} = -\cos\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\imath-\sin\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\jmath-\sin\varphi\cos\varphi\,\vec k$, ne segue che Φ è la rappresentazione positiva. Inoltre, $\vec F(\Phi(\vartheta,\varphi))\cdot\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\wedge\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi) = \langle\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\,\vec\imath+\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\,\vec\jmath+\cos\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varphi,-\cos\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\imath-\sin\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\jmath-\sin\varphi\cos\varphi\,\vec k\rangle = -3\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^3\varphi\cos\varphi$, e quindi si ha

$$\int_S \vec F\cdot\vec\nu\,d\sigma = \iint_D \vec F(\Phi(\vartheta,\varphi))\cdot\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\wedge\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta d\varphi = -3\iint_D \sin\vartheta\cos\vartheta\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\vartheta d\varphi$$
$$= -3\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi = -3\Big[\frac12\sin 2\vartheta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\Big[\frac14\sin^4\varphi\Big]_0^{\pi/2} = -\frac38.$$

(6) Una parametrizzazione di S è $\Phi(\vartheta,\varphi)=(\cos\vartheta\sin\varphi,\sin\vartheta\sin\varphi,\frac12\cos\varphi)$, $(\vartheta,\varphi)\in D:=[0,2\pi]\times[0,\pi]$. Poiché $\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\wedge\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi)=\begin{vmatrix}\vec\imath & \vec\jmath & \vec k\\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & 0\\ \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & -\frac12\sin\varphi\end{vmatrix} = -\frac12\cos\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\imath-\frac12\sin\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\jmath-\sin\varphi\cos\varphi\,\vec k$, e $\Phi_\vartheta(0,\frac{\pi}{2})\wedge\Phi_\varphi(0,\frac{\pi}{2})=-\frac12\vec\imath$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec F(\Phi(\vartheta,\varphi))\cdot\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\wedge\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi) = \langle\cos\vartheta\sin\varphi\,\vec\imath,-\frac12\cos\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\imath-\frac12\sin\vartheta\sin^2\varphi\,\vec\jmath-\sin\varphi\cos\varphi\,\vec k\rangle = -\frac12\cos^2\vartheta\sin^3\varphi$, e quindi si ha

$$\int_S \vec F\cdot\vec\nu\,d\sigma = -\iint_D \vec F(\Phi(\vartheta,\varphi))\cdot\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\wedge\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta d\varphi = \frac12\iint_D \cos^2\vartheta\sin^3\varphi\,d\vartheta d\varphi$$
$$= \frac12\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\,d\vartheta\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac14\Big[\vartheta+\frac12\sin 2\vartheta\Big]_0^{2\pi}\cdot\Big[-\cos\varphi+\frac13\cos^3\varphi\Big]_0^{\pi}$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac43 = \frac23\pi.$$

□

Svolgimento esercizio 6

(1) Usiamo il teorema di Stokes. Intanto ∂^+S si compone di due cammini regolari chiusi disgiunti γ_0 e γ_1. Siano, allora, S_0 la superficie $z=0$, $x^2+y^2\le 1$, che soddisfa $\partial^+S_0=\gamma_0$, e S_1 la superficie $z=3-x-2y$, $x^2+y^2\le 1$, che soddisfa $\partial^-S_1=\gamma_1$. Una rappresentazione parametrica di S_0

è $\Phi^0(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$, mentre una rappresentazione parametrica di S_1 è $\Phi^1(x,y) = (x,y,3-x-2y)$, $(x,y) \in D$, e si ha

$$\Phi^0_x(x,y) \wedge \Phi^0_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\,,$$

$$\Phi^1_x(x,y) \wedge \Phi^1_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}\,.$$

Inoltre $F(x,y,z) = (2x^3+z)\,\vec{\imath} + (x^2y+3y^3)\,\vec{\jmath} + (xz^2+4z^3)\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^3+z & x^2y+3y^3 & xz^2+4z^3 \end{vmatrix} = (1-z^2)\,\vec{\jmath} + 2xy\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+ S} \omega &= \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{S_0} \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma - \int_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma \\
&= \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi^0(x,y)) \cdot \Phi^0_x(x,y) \wedge \Phi^0_y(x,y)\,dxdy - \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi^1(x,y)) \cdot \Phi^1_x(x,y) \wedge \Phi^1_y(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_D \big(2xy + (16-12x-24y+2x^2+6xy+8y^2)\big)\,dxdy = \iint_D (16+2x^2+8y^2)\,dxdy \\
&= 32\pi + 2\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \cos^2\vartheta\,d\varrho + 8\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \sin^2\vartheta\,d\varrho = 32\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{137}{4}\,\pi.
\end{aligned}$$

(2) Usiamo il teorema di Stokes. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x,y) = (x,y,y)$, $(x,y) \in D$, e si ha

$$\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x,y,z) = (x^3+y^2)\,\vec{\imath} + (xy^2+y^4)\,\vec{\jmath} + (xz-2z^4)\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3+y^2 & xy^2+y^4 & xz-2z^4 \end{vmatrix} = -z\,\vec{\jmath} + (y^2-2y)\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_D (y^2-y)\,dxdy = \iint_D y^2\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2\vartheta\,\varrho d\varrho = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(3) Usiamo il teorema di Stokes. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x,y) = (x, y, 1+xy)$, $(x,y) \in D$, e si ha

$$\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + z^2(x-1)\,\vec{\jmath} + (y + xy + 2z^7)\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xz^2 - z^2 & y + xy + 2z^7 \end{vmatrix} = (1 + x + 2z - 2xz)\,\vec{\imath} - y\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy \\
&= \iint_D (1 - 3y + 4xy - 2xy^2 + 3x^2y^2)\, dxdy = 3 \iint_D x^2y^2\, dxdy \\
&= 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^5 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \, d\varrho = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\vartheta)\, d\vartheta \left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 4\vartheta}{2}\right)^2 d\vartheta \\
&= \frac{1}{32}\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos 4\vartheta + \cos^2 4\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 8\vartheta}{2}\, d\vartheta = \frac{3\pi}{32}.
\end{aligned}$$

(4) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = 2y + 3\sin(x^2+y^2)$, $x^2+y^2 \le 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x,y) = \big(x, y, 2y + 3\sin(x^2+y^2)\big)$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, e si ha

$$\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 6x\cos(x^2+y^2) \\ 0 & 1 & 2 + 6y\cos(x^2+y^2) \end{vmatrix} = -6x\cos(x^2+y^2)\,\vec{\imath} - 2\big(1 + 3y\cos(x^2+y^2)\big)\,\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x,y,z) = x^7y\,\vec{\imath} + (1+y^8)\,\vec{\jmath} + (xy^2 + z^9)\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^7y & 1 + y^8 & xy^2 + z^9 \end{vmatrix} = 2xy\,\vec{\imath} - y^2\,\vec{\jmath} - x^7\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy \\
&= \iint_D \big(-x^7 + 2y^2 + 6y(y^2 - 2x^2)\cos(x^2+y^2)\big)\, dxdy = 2\iint_D y^2\, dxdy \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2\vartheta \, \varrho d\varrho = \pi\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(5) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $y = \log(1 + 4x^2 + z^2)$, $x^2 + \frac{1}{4} z^2 \le 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(u, v) = (u, \log(1 + 4u^2 + v^2), v)$, $(u, v) \in D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \frac{1}{4} v^2 \le 1\}$, e si ha

$$\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & \frac{8u}{1+4u^2+v^2} & 0 \\ 0 & \frac{2v}{1+4u^2+v^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{8u}{1+4u^2+v^2}\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \frac{2v}{1+4u^2+v^2}\,\vec{k},$$

per cui Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre $F(x, y, z) = yz^2\,\vec{\imath} + 3z^2\,\vec{\jmath} - 3x\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & 3z^2 & -3x \end{vmatrix} = -6z\,\vec{\imath} + (3 + 2yz)\,\vec{\jmath} - z^2\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = -\iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\, dudv \\ &= -\iint_D \left(-3 - 2v\log(1+4u^2+v^2) - \frac{2v(24u+v^2)}{1+4u^2+v^2} \right) dudv = 3\,\mathrm{area}(D) = 6\pi. \end{aligned}$$

(6) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $x = e^{y^2 - z^2}$, $\frac{1}{4} y^2 + z^2 \le 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(u, v) = (e^{u^2-v^2}, u, v)$, $(u, v) \in D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} u^2 + v^2 \le 1\}$, e si ha

$$\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2ue^{u^2-v^2} & 1 & 0 \\ -2ve^{u^2-v^2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - 2ue^{u^2-v^2}\,\vec{\jmath} + 2ve^{u^2-v^2}\,\vec{k},$$

per cui Φ è la rappresentazione positiva. Inoltre $F(x, y, z) = -3z\,\vec{\imath} + 3x^2\,\vec{\jmath} + yz^2\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3z & 3x^2 & yz^2 \end{vmatrix} = z^2\,\vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath} + 6x\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\, dudv \\ &= \iint_D (6ue^{u^2-v^2} + 12ve^{2(u^2-v^2)} + v^2)\, dudv = \iint_D v^2\, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2\vartheta \cdot 2\varrho\, d\varrho = 2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\vartheta}{2} \Big[\frac{\varrho^4}{4}\Big]_0^1 d\vartheta = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

(7) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = x + y$, $x^2 + y^2 \le 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x, y) = (x, y, x + y)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, e si ha

$$\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x,y,z) = (x+y)\,\vec{\imath} + (x^3+y)\,\vec{\jmath} + (x+y+z^3)\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & x^3+y & x+y+z^3 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + (3x^2-1)\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy \\ &= \iint_D (3x^2-1)\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (3\varrho^2 \cos^2\vartheta - 1)\, \varrho d\varrho = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(8) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = 1+y$, $x^2+y^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x,y) = (x,y,1+y)$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, e si ha

$$\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x,y,z) = (x^2-yz)\,\vec{\imath} + (y^2+xz^2)\,\vec{\jmath} + (z^2-xy)\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-yz & y^2+xz^2 & z^2-xy \end{vmatrix} = -(x+2xz)\,\vec{\imath} + (z^2+z)\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy \\ &= \iint_D (2+3y+y^2)\, dxdy = \iint_D (2+y^2)\, dxdy \\ &= 2\,\operatorname{area}(D) + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2\vartheta\, \varrho d\varrho = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

(9) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = 1-x-y$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x,y) = (x,y,1-x-y)$, $(x,y) \in D$, e si ha

$$\Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x,y,z) = (x^2+y^2)\,\vec{\imath} + (y^2+z^2)\,\vec{\jmath} + (x^2+z^2)\,\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & x^2+z^2 \end{vmatrix} = -2z\,\vec{\imath} - 2x\,\vec{\jmath} - 2y\,\vec{k}.$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi \, d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x(x,y) \wedge \Phi_y(x,y)\, dxdy$$
$$= \iint_D -2\, dxdy = -2\, \operatorname{area}(D) = -1.$$

□

Svolgimento esercizio 7

(1) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$$
$$\overset{(a)}{=} 6 \int_0^1 x^2\, dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 6\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = 2,$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

(2) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 2(x+y+z)$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D 2(x+y+z)\, dxdydz$$
$$\overset{(a)}{=} 2 \int_0^1 z\, dz \iint_{E_z} dxdy = 2 \int_0^1 z \cdot \pi z^2\, dz = 2\pi\Big[\frac{1}{4}z^4\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio, e $E_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le z^2\}$.

(3) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 3(x^2+y^2+z^2)$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\, dxdydz \overset{(a)}{=} 3 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \cdot \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho$$
$$= 3\Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi \cdot 2\pi \cdot \Big[\frac{1}{5}\varrho^5\Big]_0^1 = \frac{12}{5}\pi,$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di coordinate $x = \varrho\cos\vartheta\sin\varphi$, $y = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \varrho\cos\varphi$.

(4) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = x^2+y^2$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D (x^2+y^2)\, dxdydz \overset{(a)}{=} \iint_C (x^2+y^2)\, dxdy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2} dz$$
$$= \iint_C (x^2+y^2)\big(1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\big)\, dxdy \overset{(b)}{=} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2(1+\varrho^2-2\varrho)\, \varrho d\varrho$$
$$= 2\pi\Big[\frac{1}{4}\varrho^4 - \frac{2}{5}\varrho^5 + \frac{1}{6}\varrho^6\Big]_0^1 = \frac{\pi}{30},$$

dove in (a) si è posto $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$, e in (b) si è usato il cambiamento di coordinate $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$.

(5) Si ha $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} = \iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\;dxdydz \overset{(a)}{=} \int_0^1 dz \iint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\ &\overset{(b)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \varrho^2\,d\varrho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[\frac{1}{3}\varrho^3\Big]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\vartheta\,d\vartheta \\ &= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta \overset{(c)}{=} \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}\Big[t-\frac{1}{3}t^3\Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{9},\end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $C:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\le 1\}$, in (b) si è usato il cambiamento di coordinate $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$, e in (c) il cambiamento di coordinate $t=\sin\vartheta$.

(6) Si ha $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=3(1-\sqrt{x^2+y^2}\,)$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} = \iiint_D 3(1-\sqrt{x^2+y^2}\,)\,dxdydz \\ &= 3\operatorname{vol}(D) - 3\int_0^1 dz \iint_{[0,1]^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \overset{(a)}{=} 3 - 6\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\ &\overset{(b)}{=} 3-6\int_0^{\pi/4} d\vartheta\int_0^{1/\cos\vartheta}\varrho^2\,d\varrho = 3-6\int_0^{\pi/4}\Big[\frac{1}{3}\varrho^3\Big]_0^{1/\cos\vartheta} d\vartheta = 3-2\int_0^{\pi/4}\frac{d\vartheta}{\cos^3\vartheta} \\ &= 3-2\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\vartheta}{(1-\sin^2\vartheta)^2}\,d\vartheta \overset{(c)}{=} 3-2\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{(1-t^2)^2} \\ &\overset{(d)}{=} 3-\frac{1}{2}\Big[-\log|t-1|-\frac{1}{t-1}+\log|t+1|-\frac{1}{t+1}\Big]_0^{\sqrt{2}/2} = 3+\frac{1}{2}\Big[\log\frac{|t-1|}{|t+1|}-\frac{2t}{1-t^2}\Big]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= 3+\frac{1}{2}\log(3-2\sqrt{2})-\sqrt{2},\end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio e $E:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$, in (b) il cambiamento di coordinate $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$, in (c) il cambiamento di coordinate $t=\sin\vartheta$, e in (d) la decomposizione $\frac{1}{(t^2-1)^2}=-\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(t+1)^2}$.

(7) Si ha $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=3x^2+12y^2+1$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} = \iiint_D (3x^2+12y^2+1)\;dxdydz \\ &\overset{(a)}{=} \int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 \big(12\varrho^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi+12\varrho^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi+1\big)\cdot 2\sqrt{2}\,\varrho^2\sin\varphi\,d\varrho \\ &= 4\sqrt{2}\pi\int_0^\pi\Big[\frac{12}{5}\varrho^5\sin^3\varphi+\frac{1}{3}\varrho^3\sin\varphi\Big]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\varphi = 4\sqrt{2}\pi\int_0^\pi\Big(\frac{12}{5}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin\varphi\Big)\,d\varphi \\ &\overset{(b)}{=} \frac{48\sqrt{2}}{5}\pi\int_{-1}^1(1-t^2)\,dt+\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi = \frac{48\sqrt{2}}{5}\pi\Big[t-\frac{1}{3}t^3\Big]_{-1}^1+\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{232}{15}\sqrt{2}\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di coordinate $x=2\varrho\cos\vartheta\sin\varphi$, $y=\varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=\sqrt{2}\varrho\cos\varphi$, e in (b) il cambiamento di coordinate $t=\cos\varphi$.

(8) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = (y-x)e^{x+y}$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D (y-x)e^{x+y} \; dxdydz \\ &\overset{(a)}{=} \iint_C (y-x)e^{x+y} \, dxdy \int_0^{x+y} dz = \iint_C (y^2 - x^2) e^{x+y} \, dxdy \\ &\overset{(b)}{=} -\frac{1}{2} \iint_{[0,2]^2} ste^s \, dsdt = -\frac{1}{2} \Big[\frac{1}{2} t^2\Big]_0^2 \cdot \Big[(s-1)e^s\Big]_0^2 = -e^2 - 1,\end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 2 - |y|\}$, e in (b) si è usato il cambiamento di coordinate $x = \frac{s+t}{2}$, $y = \frac{s-t}{2} \implies dxdy = -\frac{1}{2} \, dsdt$.

$\square$

Svolgimento esercizio 8

(1) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$, $S_0 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^-$, e, poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 \, d\sigma = \iint_C (x+y) \, dxdy = 0.$$

(2) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3}\}$, $S_0 := \{(x, y, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{3})$, $(x, y) \in C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^-$, e, poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 \, d\sigma = \iint_C (x + y^2) \, dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2 \vartheta \, \varrho d\varrho \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} \Big[\frac{1}{4} \varrho^4\Big]_0^1 d\vartheta = \frac{1}{8} \Big[\vartheta - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta\Big]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(3) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \leq 0\}$, $S_0 := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x, z) = (x, 0, z)$, $(x, z) \in C := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_z = -\vec{\jmath}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^-$, e, poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 3$, otteniamo

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 \, d\sigma = 3 \operatorname{vol}(D) - \iint_C 0 \, dxdz = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi = 2\pi.$$

(4) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y \leq 2\}$, $S_0 := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 9\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x, z) =$

$(x,0,z)$, $(x,z) \in C_0 := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+z^2 \le 9\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi^0_x \wedge \Phi^0_z = -\vec{\jmath}$, e $S_1 := \{(x,2,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \le 5\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x,z) = (x,0,z)$, $(x,z) \in C_1 := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+z^2 \le 5\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi^1_x \wedge \Phi^1_z = -\vec{\jmath}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^+ \cup S_1^-$, e, poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} - \int_{S_0} \vec{F}\cdot\vec{n}_0 \, d\sigma + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1 \, d\sigma = \iint_{C_0} z \, dxdz - \iint_{C_1} z\, dxdz \overset{(a)}{=} 0.$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

(5) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 \le 1, 0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, $S_0 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in C_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi^0_x \wedge \Phi^0_y = \vec{k}$, e $S_1 := \{(x,y,\frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le \frac{1}{4}\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x,y) = (x,y,\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(x,y) \in C_{\sqrt{3}/2} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le \frac{1}{4}\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi^1_x \wedge \Phi^1_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^- \cup S_1^+$, e, poiché $\operatorname{div}\vec{F} = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e \, d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} + \int_{S_0} \vec{F}\cdot\vec{n}_0 \, d\sigma - \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1 \, d\sigma \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} dz \iint_{C_z} dxdy + \iint_{C_0} 0 \, dxdy - \iint_{C_{\sqrt{3}/2}} \frac{\sqrt{3}}{2} \, dxdy \\
&\overset{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}/2} \operatorname{area}(C_z)\, dz - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{area}(C_{\sqrt{3}/2}) \\
&\overset{(b)}{=} 8\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} (1-z^2)\, dz - \pi\sqrt{3} = 8\pi \Big[z - \frac{1}{3} z^3 \Big]_0^{\sqrt{3}/2} - \pi\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3},
\end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $C_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1 - z^2\}$, e in (b) si è usata la formula $\operatorname{area}(C_z) = 8\pi(1-z^2)$ che dà l'area dell'ellisse.

(6) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0,2\pi], \varrho \in [0,1], 1-\varrho \le z \le 2\}$, e $S_0 := \{(x,y,2) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in C_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^+$, e, poiché $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} - \int_{S_0} \vec{F}\cdot\vec{n}_0 \, d\sigma = -\iint_C 0 \, dxdy = 0.$$

(7) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0,\pi], \\ \sin x, & x \in [\pi, \frac{5}{2}\pi], \end{cases}$ $D := \{(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0,2\pi], \varrho \in [0,\frac{5}{2}\pi], f(\varrho) \le z \le 1\}$, $S_0 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le \pi^2\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in C_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi^0_x \wedge \Phi^0_y = \vec{k}$, $S_1 := \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le \frac{25}{4}\pi^2\}$, di rappresentazione

parametrica $\Phi^1(x,y) = (x,y,1)$, $(x,y) \in C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \frac{25}{4}\pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi^1_x \wedge \Phi^1_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^- \cup S_0^- \cup S_1^+$, e, poiché $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_i\, d\sigma = -\iiint_D \operatorname{div}\vec{F} - \int_{S_0} \vec{F}\cdot\vec{n}_0\, d\sigma + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\, d\sigma = -\iint_{C_0} dxdy + \iint_{C_1} dxdy$$
$$= \operatorname{area}(C_1) - \operatorname{area}(C_0) = \frac{25}{4}\pi^3 - \pi^3 = \frac{21}{4}\pi^3.$$

(8) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0,\pi], \\ \sin x, & x \in [\pi, 3\pi], \end{cases}$ $D := \{(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0,2\pi], \varrho \in [0,3\pi], -\sqrt{9\pi^2-\varrho^2} \le z \le f(\varrho)\}$, $S_0 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le \pi^2\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in C_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi^0_x \wedge \Phi^0_y = \vec{k}$, $S_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9\pi^2, z \le 0\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x,y) = (x,y,-\sqrt{9\pi^2-x^2-y^2})$, $(x,y) \in C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 9\pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi^1_x \wedge \Phi^1_y = -\frac{x}{\sqrt{9\pi^2-x^2-y^2}}\,\vec{\imath} - \frac{y}{\sqrt{9\pi^2-x^2-y^2}}\,\vec{\jmath} + \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^+ \cup S_1^-$, e, poiché $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} - \int_{S_0} \vec{F}\cdot\vec{n}_0\, d\sigma + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\, d\sigma \overset{(a)}{=} -\int_{S_0} \vec{F}\cdot\vec{k}\, d\sigma + \int_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}_2\, d\sigma$$
$$= -\iint_{C_0} dxdy + \iint_{C_2} dxdy = \operatorname{area}(C_2) - \operatorname{area}(C_0) = 9\pi^3 - \pi^3 = 8\pi^3,$$

dove in (a) si è usato il fatto che $\vec{F}$ ha divergenza nulla per sostituire il calcolo del flusso attraverso S_1 con quello attraverso $S_2 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 9\pi^2\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^2(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in C_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_2 = \Phi^2_x \wedge \Phi^2_y = \vec{k}$.

(9) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(\varrho\cos\vartheta, (1+\varrho\sin\vartheta)\cos\varphi, (1+\varrho\sin\vartheta)\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0,\pi], \varrho \in [0,1], \varphi \in [0,\pi]\}$, $S_0 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+(y-1)^2 \le 1, y \ge 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in C_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \le 1, y \ge 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi^0_x \wedge \Phi^0_y = \vec{k}$, $S_1 := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+(y+1)^2 \le 1, y \le -1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y+1)^2 \le 1, y \le -1\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi^1_x \wedge \Phi^1_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^- \cup S_1^-$, e, poiché $\operatorname{div}\vec{F} = 1$, otteniamo

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F} + \int_{S_0} \vec{F}\cdot\vec{n}_0\, d\sigma + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\, d\sigma = \operatorname{vol}(D) + \iint_{C_0} 0\, dxdy + \iint_{C_1} 0\, dxdy$$
$$\overset{(a)}{=} \iiint_T \varrho(1+\varrho\sin\vartheta)\, d\varrho d\vartheta d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^1 \varrho(1+\varrho\sin\vartheta)\, d\varrho$$
$$= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\varrho^2 + \frac{1}{3}\varrho^3\sin\vartheta\right]_0^1 d\vartheta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{3}\cos\vartheta\right]_0^\pi d\varphi = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi^2,$$

dove in (a) si è posto $T := [0,1]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$, e si è usato il fatto che lo Jacobiano del cambiamento di variabili $(x,y,z) \mapsto (\varrho,\vartheta,\varphi)$ è $J(\varrho,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\varrho\sin\vartheta & \varrho\cos\vartheta\cos\varphi & \varrho\cos\vartheta\sin\varphi \\ 0 & -(1+\varrho\sin\vartheta)\sin\varphi & (1+\varrho\sin\vartheta)\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho(1+\varrho\sin\vartheta)$.

$\square$