Analisi Matematica II
Integrali superficiali

**Esercizio 1.** Determinare una rappresentazione parametrica delle seguenti superfici

(1) $z = x^2 + y^2$,

(2) $z = x^2 - y^2$,

(3) $z^2 = x^2 + 4y^2$,

(4) $x^2 + y^2 = 1$,

(5) $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$,

(6) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$,

(7) $x^2 + 4(y-1)^2 + 9z^2 = 4$,

(8) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = -1$, $z < 0$,

(9) $(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$.

**Esercizio 2.** Determinare un vettore normale, la retta normale e il piano tangente, nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ indicato, alle seguenti superfici

(1) $\Phi(u,v) = \big(u, v, uv\big)$, in $(1,1,1)$,

(2) $\Phi(u,v) = \big(u+v, u-v, u^2+v^2\big)$, in $(1,1,1)$,

(3) $\Phi(u,v) = \big(u^2+v^2, u^2-v^2, uv\big)$, in $(1,1,0)$,

(4) $\Phi(u,v) = \big(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u\big)$, in $(1,0,0)$,

(5) $\Phi(u,v) = \big(u^2 \cos v, u, u^2 \sin v\big)$, in $(1,1,0)$,

(6) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, in $(1,0,0)$,

(7) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, in $(1,1,1)$,

(8) $x^2 + y^2 = 1$, in $(1,0,0)$,

(9) $z = x^2 + y^2$, in $(1,0,1)$.

**Esercizio 3.** Calcolare l'area delle superfici seguenti

(1) $z = \sqrt{2xy}$, $(x,y) \in [1,2]^2$,

(2) $z = x + y^2$, $(x,y) \in [0,1]^2$,

(3) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $(x,y) \in \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq x\big\}$,

(4) $\Phi(u,v) = \big(uv, u+v, u-v\big)$, $(u,v) \in \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\big\}$,

(5) $\Phi(u,v) = \big(u \cos v, v, \cos v\big)$, $(u,v) \in [0,1] \times [0,\pi]$,

(6) $\Phi(u,v) = \big(\log u, \log v, u\big)$, $(u,v) \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}] \times [1,e]$.

**Esercizio 4.** Calcolare i seguenti integrali superficiali

(1) $\displaystyle\int_S y^2 \, d\sigma$, dove $S$ è il grafico della funzione $z = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ sull'insieme $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\big\}$,

(2) $\displaystyle\int_S \frac{x}{\sqrt{4z+1}}\,d\sigma$, dove $S$ è il grafico della funzione $z = x^2 + y^2$ sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \le 0, x \le 0\}$,

(3) $\displaystyle\int_S \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}}\,d\sigma$, dove $S$ è la superficie di equazioni parametriche $\Phi(u,v) = \big(u\cos v, v, \cos v\big)$, $(u,v) \in \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le \frac{\pi}{2}, 0 \le v \le u\big\}$,

(4) $\displaystyle\int_S (x^2 + y^2)\,d\sigma$, dove $S$ è la superficie di equazioni implicite $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le 1$.

**Esercizio 5.** Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo vettoriale $\vec{F}$ attraverso la superficie $S^+$, dove

(2) $\vec{F} = yz\,\vec{\imath} + xz\,\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}$, e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$, orientata in modo che la prima componente del versore normale sia negativa,

(2) $\vec{F}(x,y,z) = 2y\,\vec{\imath} + 2x\,\vec{\jmath} + 3y\,\vec{k}$, e $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 2\big\}$, orientato in modo che il vettore normale in $(0,0,0)$ abbia terza componente positiva,

(3) $\vec{F} = xy\,\vec{\imath} + xz\,\vec{\jmath} + (1+yz)\,\vec{k}$, e $S$ è il grafico della funzione $z = x^2 + y^2$ sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$, orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente negativa,

(4) $\vec{F} = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \ge 0\}$, orientata nel verso della normale interna al paraboloide,

(5) $\vec{F} = yz\,\vec{\imath} + xz\,\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}$, e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$, orientata in modo che la seconda componente del versore normale sia negativa,

(6) $\vec{F} = z\,\vec{\imath}$, e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1\}$, orientata nel verso della normale esterna all'ellissoide.

**Esercizio 6.** Calcolare (usando il teorema di Stokes) i seguenti integrali curvilinei

(1) $\displaystyle\int_{\partial^+ S} z\,dx + x^2y\,dy + xz^2\,dz$, dove $S$ è la superficie laterale del solido $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 3 - x - 2y\}$, orientata secondo la normale esterna a $T$,

(2) $\displaystyle\int_{\partial^+ S} (x^3 + y^2)\,dx + (xy^2 + y^4)\,dy + (xz - 2z^4)\,dz$, dove $S$ è il grafico della funzione $z = y$, definita su $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2x\big\}$,

(3) $\displaystyle\int_{\partial^+ S} x^2\,dx + z^2(x-1)\,dy + (y + xy + 2z^7)\,dz$, dove $S$ è il grafico della funzione $z = 1 + xy$, definita su $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\big\}$,

(4) $\displaystyle\int_\gamma x^7y\,dx + (1 + y^8)\,dy + (xy^2 + z^9)\,dz$, dove $\gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2y + 3\sin(x^2 + y^2) \end{cases}$, orientata in modo che la sua proiezione sul piano $z = 0$ sia percorsa in senso antiorario,

(5) $\displaystyle\int_\gamma yz^2\,dx + 3z^2\,dy - 3x\,dz$, dove $\gamma = \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4 \\ y = \log(1 + 2x^2 + z^2) \end{cases}$, orientata in modo che la sua proiezione sul piano $y = 0$ sia percorsa in senso antiorario,

(6) $\displaystyle\int_\gamma -3z\,dx + 3x^2\,dy + yz^2\,dz$, dove $\gamma = \begin{cases} y^2+4z^2=4 \\ x = e^{y^2-z^2} \end{cases}$, orientata in modo che la sua proiezione sul piano $z=0$ sia percorsa in senso antiorario,

(7) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)\,dx + (x^3+y)\,dy + (x+y+z^3)\,dz$, dove $\gamma(t) = \big(\cos t, \sin t, \sin t + \cos t\big)$, $t \in [0, 2\pi]$,

(8) $\displaystyle\int_\gamma (x^2-yz)\,dx + (y^2+xz^2)\,dy + (z^2-xy)\,dz$, dove $\gamma(t) = \big(\cos t, \sin t, 1+\sin t\big)$, $t \in [0, 2\pi]$,

(9) $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (y^2+z^2)\,dy + (x^2+z^2)\,dz$, dove $\gamma$ è il perimetro del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, orientato in modo che il vettore tangente in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ abbia prima componente negativa.

**Esercizio 7.** Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}$ uscente dalla superficie del solido $D$, quando

(1) $\vec{F}(x,y,z) = x^3\,\vec{\imath} + y^3\,\vec{\jmath} + z^3\,\vec{k}$, e $D = [0,1]^3$,

(2) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$, e $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2, 0 \le z \le 1\big\}$,

(3) $\vec{F}(x,y,z) = x^3\,\vec{\imath} + y^3\,\vec{\jmath} + z^3\,\vec{k}$, e $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\big\}$,

(4) $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{\imath} + x^2y\,\vec{\jmath} + y^2z\,\vec{k}$, e $D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1+x^2+y^2\Big\}$,

(5) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + z\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}$, e $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2-2x+y^2 \le 0,\ 0 \le z \le 1\big\}$,

(6) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + 2y\,\vec{\jmath} - 3z\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}$, e $D = [0,1]^3$,

(7) $\vec{F}(x,y,z) = x^3\,\vec{\imath} + 4y^3\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, e $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+2z^2 \le 4\big\}$,

(8) $\vec{F}(x,y,z) = ye^{x+y}\,\vec{\imath} - xe^{x+y}\,\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}$, e $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \le x \le 2-|y|,\ 0 \le z \le x+y\big\}$.

**Esercizio 8.** Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}$ attraverso la superficie $S^+$, dove

(1) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\,\vec{\imath} + (z+x)\,\vec{\jmath} + (x+y)\,\vec{k}$, e $S$ è la porzione di paraboloide di equazione $z = 1-x^2-y^2$, $z \ge 0$, e orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva,

(2) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z^2)\,\vec{\imath} + (z+x^2)\,\vec{\jmath} + (x+y^2)\,\vec{k}$, e $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 \le 1,\ z \ge 0\big\}$, è orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva,

(3) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, e $S^+$ è la parte di superficie sferica unitaria con centro nel punto $(0,0,0)$ giacente nel semispazio $y \le 0$, e orientata secondo il versore normale esterno $\vec{n}_e$,

(4) $\vec{F} = y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + (x-y)\vec{k}$, e $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9, 0 \le y \le 2\big\}$, e orientata in modo che il vettore normale in $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ abbia prima componente positiva,

(5) $\vec{F} = y^2\vec{\imath} + z\vec{k}$, e $S^+$ è la superficie dell'ellissoide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, compresa tra i piani $z=0$ e $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e orientata secondo la normale esterna,

(6) $\vec{F} = y\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, e $S^+$ è la superficie aperta, orientata in modo che il vettore normale in $(0,1,1)$ abbia seconda componente positiva, e generata dalla rotazione di $2\pi$ intorno all'asse $z$ della poligonale $\gamma$ giacente nel piano $yz$, che congiunge i punti $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(0,1,2)$,

(7) $\vec{F} = \vec{\jmath} + \vec{k}$, e $S$ è la superficie, orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva, e generata dalla rotazione di $2\pi$ intorno all'asse $z$ della curva $\gamma$ di equazioni $y = u$, $z = \sin u$, $u \in [\pi, \frac{5}{2}\pi]$,

(8) $\vec{F} = \vec{\jmath} + \vec{k}$, e $S$ è la superficie, orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente positiva, e generata dalla rotazione di $2\pi$ intorno all'asse $z$ della curva $\gamma$ di equazioni $y = u$, $z = \sin u$, $u \in [\pi, 3\pi]$,

(9) $\vec{F} = y\vec{\imath} + 2x\vec{\jmath} + z\vec{k}$, e $S^+$ è la superficie, orientata in modo che il vettore normale nel punto $(0, 0, 2)$ abbia terza componente positiva, giacente nel semispazio $z \geq 0$, e generata dalla rotazione di un angolo $\pi$ intorno all'asse $x$ della curva chiusa regolare a tratti $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove $\gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 = 1, y \geq 1, z = 0\}$ e $\gamma_2$ è il segmento tra i punti $(1, 1, 0)$ e $(-1, 1, 0)$.