Analisi Matematica II
Integrali doppi e tripli

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali doppi

(1) $\displaystyle\iint_D x^3 y\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0\}$,

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{(y+1)^2}\,dxdy$, dove $D = [0,1] \times [1,2]$,

(3) $\displaystyle\iint_D \sin x \cos y\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$,

(4) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \pi\}$,

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1-x-y+xy}\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$,

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(2,1), (1,2), (1,0)$,

(7) $\displaystyle\iint_D x(y+\sin(\pi y))\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(2,1), (1,2), (1,0)$,

(8) $\displaystyle\iint_D x^2 e^{xy}\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$,

(9) $\displaystyle\iint_D x^2 e^{xy}\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0), (-1,2), (1,2)$,

(10) $\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0), (-1,2), (1,2)$,

(11) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, -x^2 \le y \le 1+x\}$,

(12) $\displaystyle\iint_D (x^2+y)\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x^2\}$,

(13) $\displaystyle\iint_D e^{-(x-y)}\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, x \le y \le 2-2x\}$,

(14) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\pi, \sin x \le y \le 1+\sin x\}$,

(15) $\displaystyle\iint_D y^2\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\pi, \sin x \le y \le 1+\sin x\}$,

(16) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le x\}$,

(17) $\displaystyle\iint_D y\cos x\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y^2+\pi, -\sqrt{\pi} \le y \le 2\sqrt{\pi}\}$,

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali doppi

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{|x|}{\sqrt{1+y^2}}\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 3\}$,

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x-y+6)^2}\,dxdy$, dove $D=[0,1]\times[1,2]$,

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1-3x^2}{(x-y+6)^2}\,dxdy$, dove $D=[0,1]\times[1,2]$,

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1-3x^2}{x-y+6}\,dxdy$, dove $D=[0,1]\times[1,2]$,

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{2x+y+1}\,dxdy$, dove $D=[1,2]\times[0,1]$,

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{2x+y+1}\,dxdy$, dove $D=[1,2]\times[0,1]$,

(7) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2+2x+1}\,dxdy$, dove $D=[1,2]\times[0,1]$,

(8) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2+2x+1}\,dxdy$, dove $D=[1,2]\times[0,1]$,

(9) $\displaystyle\iint_D \log(x+y+5)\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(-2,1),(1,1),(-2,-2)$,

(10) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2+1}{y^2+2x+1}\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0),(1,1),(1,-1)$,

(11) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\sqrt{x}\big\}$,

(12) $\displaystyle\iint_D x(y+\sin(\pi y))\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\sqrt{x}\big\}$,

(13) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1+\cos y\le x\le 1-\cos y, 0\le y\le 2\pi\big\}$,

(14) $\displaystyle\iint_D (x-1)|y|\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le |x|+|y|\le 2\big\}$,

(15) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{x^2}\frac{1}{2x+y+1}\,dy\right)dx$,

(16) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{x^2}\frac{x}{2x+y+1}\,dy\right)dx$,

(17) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{1}{y^2+2x+1}\,dy\right)dx$,

(18) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{(y+1)^2}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $y=x^2$ e $y=2x+3$,

(19) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{2x+y+2}\,dxdy$, dove D è l'insieme del piano limitato dalle curve $y=x^2$ e $y=2x+3$,

(20) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(2x-y+8)^2}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $y=x^2$ e $y=2x+3$,

(21) $\displaystyle\iint_D \frac{1-3x^2}{(2x-y+8)^2}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $y=x^2$ e $y=2x+3$,

(22) $\displaystyle\iint_D \frac{1-3x^2}{2x-y+8}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $y=x^2$ e $y=2x+3$,

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali doppi

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 3\big\}$,

(2) $\displaystyle\iint_D 2xy\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 9, y\ge x, x\le 0\big\}$,

(3) $\displaystyle\iint_D \Big|\frac{x}{y}\Big|\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 16, 0\le x\le |y|\big\}$,

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x}\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4, -x\le y\le x\big\}$,

(5) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\ge 1, |x|\le 2, |y|\le 2\big\}$,

(6) $\displaystyle\int_0^4 \bigg(\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{y^2+x^2}\,dy\bigg)dx$,

(7) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$,

(8) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato da $x^2+(y-2)^2=4$ ed esterno a $x^2+y^2=4$,

(9) $\displaystyle\iint_D |xy|\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$,

(10) $\displaystyle\iint_D |xy|\,dxdy$, dove D insieme limitato dalla circonferenza di centro $(0,3)$ e raggio 3,

(11) $\displaystyle\iint_D |xy|\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato da $x^2+(y-2)^2=4$ ed esterno a $x^2+y^2=4$,

(12) $\displaystyle\iint_D \frac{|xy|e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$,

(13) $\displaystyle\iint_D \frac{|xy|e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove D è l'insieme limitato da $x^2+(y-2)^2=4$ ed esterno a $x^2+y^2=4$.

(14) $\displaystyle\iint_D x^3y\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+\tfrac{1}{4}y^2\le 2, y\ge 2x\big\}$,

(15) $\displaystyle\iint_D |y|\,dxdy$, dove $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+\tfrac{1}{4}y^2\le 2, y\ge 2x\big\}$,

(16) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dxdy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le y\le 2\}$,

(17) $\displaystyle\iint_D (x^2-y^2)\sin(x+y)\,dxdy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\le x\le 2-|y|\}$,

(18) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x+y}\,dxdy$, dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0),(1,2),(4,3),(3,1)$.

Esercizio 4. Calcolare l'area delle seguenti regioni

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$,

(2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x+2\}$,

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, xy \leq 1\}$,

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{4}y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 8\right\}$,

(5) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^3 \leq 16x^2\}$,

(6) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2+y^2 \leq 8y\}$,

(7) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 \leq 2, y \geq 2x\right\}$.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali tripli

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{x^2y}{z}\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$,

(2) $\displaystyle\iiint_D x\sin^2 y \cos z\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$,

(3) $\displaystyle\iiint_D 2(x+y+z)\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,

(4) $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2, -1 \leq z \leq 2\}$,

(5) $\displaystyle\iiint_D (x^3+y^3+z^3)\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x+y+z \leq 1\}$,

(6) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y \leq z \leq \frac{1}{2}\}$,

(7) $\displaystyle\iiint_D xyz^2\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq z \leq x, x+z \leq y \leq 4\}$,

(8) $\displaystyle\iiint_D \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 2(1-x-y)\}$,

(9) $\displaystyle\iiint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1;\ 0 \leq y \leq x;\ \frac{1}{16} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$,

(10) $\displaystyle\iiint_D \frac{2z}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{\mathrm{arctg}(y/x)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\right) dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1;\ 0 \leq y \leq x;\ \frac{1}{16} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$,

(11) $\displaystyle\iiint_D x^2\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$,

(12) $\displaystyle\iiint_D (y-3)^2\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$,

(13) $\displaystyle\iiint_D x^2y\,dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

(14) $\displaystyle\iiint_D \left(e^z + \frac{2y}{1+x^2+y^2} + x - 1\right) dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$,

(15) $\displaystyle\iiint_D \left(e^z + z(x-1)^2 + \frac{2z}{1+(x-1)^2+(y/2)^2+z^2}\right) dxdydz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 \le 1\}$.

Esercizio 6. Calcolare il volume delle seguenti regioni

(1) $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge 1\big\}$,

(2) $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2-9z^2 \le 1, -1 \le z \le 1\big\}$,

(3) $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \le 1\big\}$,

(4) $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le x^2+y^2\big\}$,

(5) $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, -1 \le z \le x^2-y^2\big\}$,

(6) $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+9z^2 \le 1\big\}$,

(7) $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0, x^2+y^2+(z+1)^2 \ge 2\big\}$.

Esercizio 7. Calcolare i seguenti integrali impropri

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{arctg} y^2}{y}\, dxdy$, dove $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} \le y \le 1, |x| \le 1\Big\}$,

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{arctg} y}{y^2}\, dxdy$, dove $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} \le y \le 1, |x| \le 1\Big\}$,

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{(y^2+x)^2}\, dy\right) dx$,

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{(x+2)|y|}{y^2+2x+1}\, dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $x = \frac{1}{2}(y^2-1)$ e $x = 0$,

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{(x+2)y}{y^2+2x}\, dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalle curve $y = \sqrt{x}$ e $y = x$,

(6) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}}\, dy\right) dx$.

(7) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalla circonferenza di centro $(0,3)$ e raggio 3,

(8) $\displaystyle\iint_D \frac{|xy|e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\, dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalla circonferenza di centro $(0,3)$ e raggio 3,

(9) $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{|y|}}\, dxdy$, dove D è l'insieme limitato da $x^2+y^2 = 4$ ed esterno a $x^2+(y-1)^2 = 1$,

(10) $\displaystyle\iint_D \left|\frac{x}{y}\right| dxdy$, dove D è l'insieme limitato dalla curva $\frac{1}{4}x^2+y^2 = 4$.

(11) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (0,-1)$,

(12) $\displaystyle\iint_D \log\frac{x+y}{x-y}\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(1,1)$,

(13) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{|y|}}\,dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(-2,2),(2,2),(-2,-2)$,

(14) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, 0\leq y\leq e^{-x}\}$,

(15) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y^2}{(1+x^6)(1+y^6)}\,dxdy$, dove $D=\mathbb{R}^2$,

(16) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(2+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0\}$,

(17) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y^2e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove $D=\mathbb{R}^2$,

(18) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{xz^2}$, dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 1, |y|\leq x, 1\leq z\leq \frac{4}{4x-y^2}\}$.

(19) $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{\sqrt{1-x^2-4y^2-z^2}}\,dxdydz$, dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+z^2\leq 1, z\geq 0\}$.

(20) $\displaystyle\iiint_D \frac{x^2}{1+z^6}\,dxdydz$, dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\geq x^2+y^2\}$.

(21) $\displaystyle\iiint_D \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^4}\,dxdydz$, dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\geq 1\}$.