Analisi Matematica II
Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

**Esercizio 1.** Studiare la continuità delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \sin\left(\dfrac{|y|}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{1+y}\ \exp\left(\dfrac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y^3}{x}\right) \cos\left(\dfrac{1}{y}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

(6) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^3+y^3} & x+y \neq 0 \\ 0 & x+y = 0 \end{cases}$

(7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x-y} & x-y \neq 0 \\ 0 & x-y = 0 \end{cases}$

(8) $f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1+y+x^2}{y}\right)^y & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$

(9) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & y < x^2 \\ y^2 + x & y \geq x^2 \end{cases}$

(10) $f(x,y) = \begin{cases} x + y^3 & x \leq y^3 \\ x^2 + y^6 & x > y^3 \end{cases}$

(11) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy) & y < x^2 \\ 0 & y \geq x^2 \end{cases}$

(12) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2-y^2} & x^2+y^2 \leq 1 \\ \dfrac{1}{e} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x^2+y^2)\right) & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

(13) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 < 1 \\ 1 & 1 \leq x^2+y^2 \leq 2 \\ e^{x^2+y^2-2} & x^2+y^2 > 2 \end{cases}$

**Esercizio 2.** Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali, differenziabilità per le seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & y \neq 0 \\ x & y = 0, \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x \neq 0 \\ y & x = 0, \end{cases}$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \cos y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$

(6) $f(x,y) = \begin{cases} xy \log|xy| & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0, \end{cases}$

(7) $f(x,y) = \begin{cases} (4x^2 + y^2 - 4) \cos\left(\dfrac{1}{4x^2 + y^2 - 4}\right) & 4x^2 + y^2 - 4 \neq 0 \\ 0 & 4x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases}$

(8) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy) & y < x^2 \\ 0 & y \geq x^2, \end{cases}$

**Esercizio 3.** Calcolare i seguenti limiti

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \int_0^{x^2} \frac{1 + \sin x^2 y^2}{x^2}\, dy,$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \int_0^{x} \frac{y \cos^2(x^2(1+y^2))}{x^2}\, dy.$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \int_0^{x^2} \frac{(x^2 - y) \cos y^2}{\sin x^4}\, dy,$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \int_0^{x} \frac{(x - y) e^{-y^2}}{\sin^2 x}\, dy,$

(5) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \int_0^{1} \frac{\log(1 + x^2 y^2)}{x^2}\, dy,$

**Esercizio 4.** Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2, nel punto $(x_0, y_0)$ indicato, delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = x^3 + 2x^2 y + 3xy^2 - 4y^3, \quad (x_0, y_0) = (1, 2),$

(2) $f(x,y) = x\sin y, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$,

(3) $f(x,y) = x^2y + y\sin x, \quad (x_0,y_0) = (\pi,0)$,

(4) $f(x,y) = (1-\cos x)e^y, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$.

**Esercizio 5.** Determinare la natura dei punti stazionari delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$,

(2) $f(x,y) = 2(x^2+y^2+1) - (x^4+y^4)$,

(3) $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2$,

(4) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$,

(5) $f(x,y) = (x-y)e^{-(x^2+y^2)}$,

(6) $f(x,y) = (x^2+xy+y^2)e^{x+2y}$,

(7) $f(x,y) = (x^2+xy+2y^2)e^{x+y}$,

(8) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$,

(9) $f(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy$,

(10) $f(x,y) = -\sin x \sin(2y)$,

(11) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

(12) $f(x,y) = xy|y|$.

**Esercizio 6.** Mostrare che le equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto $(x_0,y_0)$ indicato, un'unica funzione $y = f(x)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ in $x_0$, e il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f$ in $x_0$.

(1) $F(x,y) = x(x^2+y^2) - 2y^2 = 0\,, \quad (1,1)$,

(2) $F(x,y) = y\sin x + xe^y - \pi = 0\,, \quad (\pi,0)$,

(3) $F(x,y) = xe^y + y\sin(x-1) - 2x - 4y + 1 = 0\,, \quad (1,0)$,

(4) $F(x,y) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + e^{xy-1} - 2 = 0\,, \quad (-1,-1)$,

(5) $F(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{\pi}{6} - \log 2 = 0\,, \quad (\sqrt{3},1)$,

(6) $F(x,y) = x^2y + 2xy^2 - \displaystyle\int_1^x e^{x^2t^2}\,dt - 3 = 0\,, \quad (1,1)$,

(7) $F(x,y) = y\sin(\pi x) + \displaystyle\int_1^{y^2} \operatorname{arctg}(xt)\,dt = 0\,, \quad (1,1)$.

**Esercizio 7.** Mostrare che le equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto $(x_0,y_0,z_0)$ indicato, un'unica funzione $z = f(x,y)$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(x_0,y_0)$.

(1) $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 - 2x + 2y - 4z + 1 = 0\,, \quad (3,-1,1)$,

(2) $F(x,y,z) = xyz - 6 = 0\,, \quad (1,-2,-3),$

(3) $F(x,y,z) = xy + yz + zx - 3 = 0\,, \quad (1,1,1),$

(4) $F(x,y,z) = \int_1^z \sin(x^2t^2)\,dt + x^2y + y^2 - z^2 = 0\,, \quad (0,1,1).$

**Esercizio 8.** Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei domini indicati

(1) $f(x,y) = x^4 + y^4\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$

(2) $f(x,y) = xy + y^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\},$

(3) $f(x,y) = y^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 - y = 0\},$

(4) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\},$

(5) $f(x,y) = xye^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x > 0\}.$

**Esercizio 9.** Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei domini indicati

(1) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^2 + 3\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 4\big\},$

(2) $f(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 32(x^2 + y^2)\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9\big\},$

(3) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\big\},$

(4) $f(x,y) = e^{(x+1)^2 + (y-1)^2}\,, \quad D = [0,1] \times [0,1],$

(5) $f(x,y) = 24x^4 + 3y^4 - (x-y)^2\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\big\},$

(6) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x^2 - y^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \le 4, y \ge \frac{1}{2}\},$

(7) $f(x,y,z) = (x-y)^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}.$