Data la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan^{\alpha+1}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)^2\sqrt{x}\,\ln^{\alpha}(1+x)}\ , \qquad \alpha \in [0,+\infty)$$

a) studiare, al variare del parametro $\alpha \in [0+\infty)$*, l'integrabilità in senso improprio della funzione nell'intervallo* $(0,+\infty)$ *;*

b) Calcolare per $\alpha = 0$ *l'integrale* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$*.*

Svolgimento. *a*) Si tratta di un integrale improprio in quanto il dominio non è limitato e la funzione in $x = 0$ non è definita.
Integreabilità in $x = 0$. Si osservi che per $x \to 0^+$ la funzione è definitivamente di segno constante e che

$$f(x) = \frac{\arctan^{\alpha+1}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)^2\sqrt{x}\,\ln^{\alpha}(1+x)} = \frac{x^{(\alpha+1)/2}}{16\,x^{1/2}\,x^{\alpha}}(1+o(1)) = \frac{1}{16\,x^{-\frac{\alpha}{2}+\alpha}}(1+o(1)) = \frac{1}{16\,x^{\frac{\alpha}{2}}}(1+o(1))$$

quindi per $x \to 0^+$ la funzione è integrabile per confronto asintotico con la funzione $\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}$ se, e solo se, $\boxed{\alpha/2 < 1 \iff \alpha < 2}$.
Integreabilità a $+\infty$. Per $x \to +\infty$ la funzione è definitivamente di segno constante e

$$f(x) = \frac{\arctan^{\alpha+1}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)^2\sqrt{x}\,\ln^{\alpha}(1+x)} = \frac{(\pi/2)^{\alpha+1}}{x^2x^{1/2}\,\ln^{\alpha}(x)}(1+o(1)) = \frac{(\pi/2)^{\alpha+1}}{x^{3/2}\,\ln^{\alpha}(x)}(1+o(1))\ .$$

Quindi per $x \to +\infty$ la funzione è integrabile in senso improprio per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ per confronto asintotico con la funzione $\frac{1}{x^{3}2}$. In conclusione la funzione è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$ se e solo se $\boxed{\alpha \in [0,2)}$.

b) Per $\alpha = 0$ si ha sostituendo ed integrando per parti si ha

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)^2\sqrt{x}}dx \overset{\boxed{y=\sqrt{x}}}{=} 2\int \frac{\arctan(y)}{(y+4)^2}dy = -2\frac{\arctan(y)}{y+4} + \int \frac{2}{(y+4)(y^2+1)}$$

Integriamo l'ultimo termine decomponendo la funzione integranda per fratti semplici

$$\frac{2}{(y+4)(y^2+1)} = \frac{A}{y+4} + \frac{Cy+D}{y^2+1}$$

da cui si ottengono i seguenti valori delle costanti

$$A = 2/17\ \ ,\ \ C = -A = -2/17\ \ ,\ \ D = -A/4 + 1/2 = 16/34$$

da cui

$$\int \frac{2}{(y+4)(y^2+1)} = \frac{2}{17}\int \frac{1}{y+4} - \frac{2}{17}\int \frac{y}{y^2+1} + \frac{16}{34}\int \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{17}\ln(y+4) - \frac{1}{17}\ln(y^2+1) + \frac{16}{34}\arctan(y) + cost$$

Quindi la primitiva nella variabile x a meno di costanti è

$$F(x) = -2\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+4} + \frac{1}{17}\ln\left(\frac{(\sqrt{x}+4)^2}{x+1}\right) + \frac{16}{34}\arctan(\sqrt{x})$$

Infine si osservi che $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{\ln(16)}{17}$, mentre $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{4\pi}{17}$ da cui

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x) = (\lim_{x\to+\infty} F(x)) - (\lim_{x\to 0^+} F(x)) = \frac{4\pi}{17} - \frac{\ln(16)}{17}}$$

$\square$

2) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{1}{k+2} + \sin\left(\frac{1}{k}\right) k - 1 \right) .$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini di segno alterno. Sia $f(k) = \frac{1}{k+2} + \sin\left(\frac{1}{k}\right) k - 1$.
Convergenza assoluta. Si osservi che per $k \to +\infty$ si ha

$$f(k) = \frac{1}{k+2} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) k - 1 = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{6k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{k}(1 + o(1))$$

quindi la serie **non converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica**.
Convergenza semplice. Applichiamo il criterio di Leibniz. Dallo sviluppo di prima si evince che $f(k) \to 0$ per $k \to +infty$. Quindi sarà sufficiente provare che $f(k)$ sia definitivamente decrescente. A tale scopo studiamo il comportamente asintotico della derivata prima:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{x+2} + \sin(1/x) - \cos(1/x)\,\frac{1}{x} \\
&= -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&= -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&= -\frac{1}{x+2}(1 + o(1))
\end{aligned}$$

da cui si deduce che $f'(x)$ è definitivamente negativa; quindi $f(x)$ e di conseguenza $f(k)$ è definitivamente decrescente. In cocnlusione per il criterio di Leibniz la serie **converge semplicemente**.
$\square$

3) Data l'eqazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{1+x^2}{t-2} \ ,$$

trovare le soluzioni massimali, specificandone il dominio di definizione, dei seguenti problemi di Cauchy: $x(1) = 0$ *e* $x(3) = 0$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili definita per $(x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Traviamo la soluzione ponendo t_0 un generico istante iniziale e $x_0 = 0$:

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{t_o}^{t} \frac{1}{t-2}\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad \arctan(x(t)) = \ln\left|\frac{t-2}{t_0-2}\right|$$

Indichiamo con x_1 la soluzione associata al dato iniziale $t_0 = 1$ e con x_3 la soluzione associata al dato iniziale $t_0 = 3$.

Dato che $t_0 = 1 \in (-\infty, 2)$, il dominio della soluzione x_1 sarà contenuto nell'intervallo $(-\infty, 2)$. Inoltre dato che l'immagine dell'arcotangente è $(-\pi/2, \pi/2)$ si ha

$$\arctan(x_1(t)) = \ln(2-t) \ , \ t \in (-\infty, 2) \ , \ -\pi/2 < \ln(2-t) < \pi/2$$

(dove si è tolto il modulo osservando che $2 - t > 0$ in $(-\infty, 2)$) da cui

$$x_1(t) = \tan(\ln(2-t)) \quad t \in (-\infty, 2) \ , \ -\pi/2 < \ln(2-t) < \pi/2 \ .$$

Risolvendo l'ultima disequazione

$$e^{-\pi/2} < 2 - t < e^{\pi/2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - e^{\pi/2} < t < 2 - e^{-\pi/2} \quad \Longleftrightarrow \quad t \in (2 - e^{\pi/2}, 2 - e^{-\pi/2}) \subset (-\infty, 2)$$

Quindi la soluzione per $t_0 = 1$ è

$$\boxed{x_1(t) = \tan(\ln(2-t)) \quad , \qquad t \in (2 - e^{\pi/2}, 2 - e^{-\pi/2}) \ .}$$

Per $t_0 = 3 \in (2, +\infty)$ ed il dominio della soluzione che x_3 sarà contenuto nell'intervallo $(2, +\infty)$. Quindi

$$\arctan(x_3(t)) = \ln(t-2) \ , \ t \in (2, +\infty) \ , \ -\pi/2 < \ln(t-2) < \pi/2$$

(dove si è tolto il modulo osservando che $t - 2 > 0$ in $(2, \infty)$) da cui

$$x_3(t) = \tan(\ln(t-2)) \ , \quad t \in (2, +\infty) \ , \ -\pi/2 < \ln(t-2) < \pi/2$$

risolvendo l'ultima disequazione

$$e^{-\pi/2} < t - 2 < e^{\pi/2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + e^{\pi/2} < t < 2 + e^{-\pi/2} \quad \Longleftrightarrow \quad t \in (2 + e^{-\pi/2}, 2 + e^{\pi/2}) \subset (2, +\infty)$$

Quindi la soluzione per $t_0 = 3$ è

$$\boxed{x_3(t) = \tan(\ln(t-2)) \quad , \qquad t \in (2 + e^{-\pi/2}, 2 + e^{\pi/2}) \ .}$$

$\square$

4) Data la funzione

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2y^2 + y^2 \ ,$$

Discutere la differenziabilità e classificare i punti critici di $f(x)$.

Svolgimento. Essendo un polinomio si tratta di una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (i polinomi sono funzioni continue e le loro derivate parziali sono adei polinomi, quindi la tesi segue dal teorema del differenziale totale). Calcoliamo i punti critici imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6xy^2 \\ -6x^2y + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x(x-2y^2) \\ 2y(-3x^2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione associata alla seconda componente ha come soluzioni: $y = 0$ e $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Sostituendo $y = 0$ nella prima si ha $x = 0$. Si osservi che $x = -1/\sqrt{3}$ sostituito nella prima equazione non ha soluzioni, mentre $x = 1/\sqrt{3}$ porta a

$$1/\sqrt{3} - 2y^2 = 0 \ \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$$

Quindi abbiamo tre punti critici

$$(0,0) \ , \ (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2\sqrt{3}}) \ , \ (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{2\sqrt{3}})$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x-y^2) & -12xy \\ -12xy & 2(1-3x^2) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3(x-y^2) & -6xy \\ -6xy & 1-3x^2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right) = 2\begin{pmatrix} 3(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}) & -2\sqrt[4]{3}\sqrt{2} \\ -2\sqrt[4]{3}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -2\sqrt[4]{3}\sqrt{2} \\ -2\sqrt[4]{3}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $det H_f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right) = -8\sqrt{3}$ ed il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right)$ è di **sella**. Mentre

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right) = 2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt[4]{3}\sqrt{2} \\ 2\sqrt[4]{3}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-8\sqrt{3}$. Quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right)$ è di **sella**. Infine

$$H_f(0,0) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è semi-definita positiva e permette di stabilire se $(0,0)$ è di sella o un minimo relativo. Tuttavia si osservi che se ci restringiamo sulla retta, passante per 'origine, $y = 0$ la funzione diventa

$$f(x,0) = x^3$$

che cambia di segno in 0 (corrispondente al punto $(0,0)$). Questo implica che $f(x,y)$ che non esiste un intorno di $(0,0)$ in cui $f(x,y) - f(0,0)$ ha segno costante. Quindi $(0,0)$ è un punto di **sella**. $\square$