1) Data la funzione

$$f(x) = (5-x)\, e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)}$$

a) Calcolare dominio ed eventuali asintoti.

b) Studiare la monotonia, trovare gli estremi locali/globali e calcolare l'immagine di f.

Tracciare un grafico qualitativo di f. Non è richiesto lo studio della convessità.

Svolgimento. *a*) Il dominio di definizione della funzione si ottiene imponendo che il denominatore ad esponente non si annulli: quindi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Per quanto riguarda gli asintoti si osservi che

$$\lim_{x\to -1^+} (5-x)\, e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)} = 6\, e^{\left(\frac{-1}{0^+}\right)} = 0^+$$

mentre

$$\lim_{x\to -1^-} (5-x)\, e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)} = 6\, e^{\left(\frac{-1}{0^-}\right)} = +\infty$$

Per quanto riguarda gli asintoti obliqui, si osservi che per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) =& (5-x)\, e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)} = e\,(5-x)\, e^{\left(\frac{x}{1+x}-1\right)} = e\,(5-x)\, e^{\left(\frac{-1}{1+x}\right)} \\ &= e\,(5-x)\left(1 - \frac{1}{1+x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e\,(5-x) - \frac{e(5-x)}{1+x} + o(1) \\ &= e\,(5-x) + \frac{ex}{1+x} - \frac{e5}{1+x} + o(1) = 6e - ex + o(1) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo due asintoti obliqui a $\pm\infty$ di equazione $\boxed{y = 6e - ex}$ un asintoto verticale $\boxed{\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty}$ mentre $\boxed{\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0^+}$

(*b*) La funzione è derivabile in tutto il suo dominio di definizione:

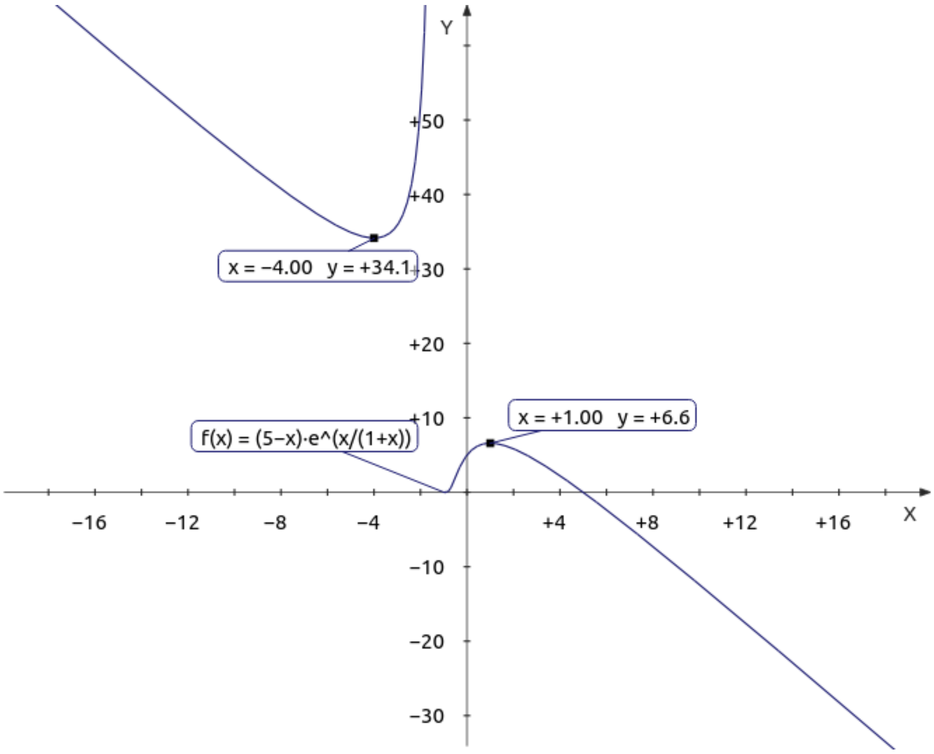
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\, e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)} + (5-x)\, e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)} \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)}}{(1+x)^2}(-(1+x)^2 + 5 - x) = \frac{e^{\left(\frac{x}{1+x}\right)}}{(1+x)^2}(-x^2 - 3x + 4)\ . \end{aligned}$$

Il segno di f' dipende dal polinomio $-x^2 - 3x + 4$ le cui radici sono $x_\pm = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3\pm 5}{2}$. Quindi la funzione è **decrescente** in $(-\infty, -4) \cup (1+\infty)$ e **crescente** in $(-4, 1)$. Quindi $x_m = -4$ **min relativo** mentre $x_M = 1$ è un **min relativo**. Si osservi che

$$f(-4) = 9e^{4/3} \quad > \quad f(1) = 4e^{1/2}$$

Da cui segue, dato che la funzione è continua che l'immagine di f è l'insieme $(-\infty, 4e^{1/2}] \cup$

$[9e^{4/3}, +\infty)$.



$\square$

2) Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^x - x\ , & x \leq 0 \\ -x^3 + bx^2 + c\sin(x) + d\ , & x\ > 0 \end{cases} \quad , \qquad b, c, d \in \mathbb{R}$$

a) Trovare per quali valori dei parametri $b, c, d \in \mathbb{R}$ la funzione risulti, contemporaneamente, continua, derivabile ed invertibile nel suo dominio di definizione (motivare le risposte).

b) Per i valori dei parametri trovati nel punto precedente calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto $(y_0, f^{-1}(y_0))$ dove $y_0 = \frac{e+1}{e}$. Calcolare inoltre il limite

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{\ln(y) - \ln(y_0)} \ .$$

Svolgimento. *a*) Per $x \neq 0$ la funzione è chiaramente continua e derivabile. Imponiamo la continuità in 0 ossia $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$. Chiaramente è sufficiente imporre

$$1 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = d \iff d = 1.$$

Imponiamo ora la derivabilità: si osservi che

$$f'(x) = e^x - 1 \quad x < 0 \quad ; \quad f'(x) = -3x^2 + 2bx + c\cos(x) \quad x > 0$$

Dato che per $d = 1$ la funzione è continua, per il corollario del teorema di Lagrange, la funzione è derivabile in 0 se i limiti delle derivate da destra e da sinistra in 0 esistono, sono finiti ed uguali:

$$\lim_{x \to 0'} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = c \quad \iff \quad c = 0$$

Quindi la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^x - x\ , & x \leq 0 \\ -x^3 + bx^2 + 1\ , & x\ > 0 \end{cases} \quad ,$$

è continua e derivabile nel suo dominio. Per l'invertibilità si osservi che per $x < 0$ la derivata prima è negativa, quindi ossia la funzione è strettamente decrescente. Quindi affinchè la funzione risulti invertibile in tutto $\mathbb{R}$ dobbiamo imporre che sia strettamente descrente in tutto $\mathbb{R}$. Si osservi che per $x > 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 2bx = x(-3x + b)$$

So osservi che se $b > 0$, allora $f'(x) > 0$ per $x \in (0, b/3)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (b/3, +\infty)$, ossia avrebbe un cambiamento di segno e quindi non sarebbe invertibile. Per $b \leq 0$ invece $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$, quindi strettamente descrscente. Quindi la condizione su b che garantisce l'invertibilità dei f su $\mathbb{R}$ è $b \in (-\infty, 0]$.

b) Dato che la funzione, per $d = 1, c = 0, b \leq 0$, è strettamente decrescente e che $f(0) = 1 < y_0$, il punto x_0 del dominio di f tale che $f(x_0) = y_0$ è minore di zero. Quindi

$$e^{x_0} - x_0 = 1 + 1/e \quad \iff \quad x_0 = -1$$

Ora $f'(-1) = \frac{1}{e} - 1 \neq 0$. Quindi per il teorema della derivata della funzione inversa si ha

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad x_0 = f^{-1(x_0)} \quad \Rightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'((e+1)/e) = \frac{e}{1-e}$$

l'equazione della retta tangente sarà

$$z = f^{-1}(y_0) + \left(f^{-1}\right)'(y_0)(y - y_0) \quad \Rightarrow \quad z = -1 + \frac{e}{1-e}(y - y_0)$$

ed infine il limite per $y \to e + 1/e$ si ottiene

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{\ln(y) - \ln(y_0)} = \frac{\left(f^{-1}\right)'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)}{\ln'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)} = \frac{\frac{e}{1-e}(y - y_0)(1 + o(1))}{\frac{e}{e+1}(y - y_0)(1 + o(1))} \to \frac{e+1}{1-e}$$

dove si è usato in fatto che $\ln'(y_0) = \frac{1}{y_0} = \frac{e}{e+1}$.

$\square$

3) Studiare i seguenti limiti:

$$a) \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-\frac{x^2}{2}} - \cos(x^5) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x\sqrt{2})}{\sin(x)\ln(\cos(x)) + x^4\sin(\frac{1}{x^2})} \,.$$

$$b) \qquad \lim_{n\to +\infty} \frac{((n-1)! + 4^n)\big((-1)^n\, n + \ln^3(n)\big)}{(n! + n^{n/2})\big(\frac{-n}{n+1}\big)^n} \,.$$

Proof. *a*) Si tratta di una forma indeterminata 0/0. So sservi che il numeratore $N(x)$ è un infinitesimo di ordine 4. Infatti

$$\begin{aligned} e^{x-\frac{x^2}{2}} &= 1 + \big(x - \frac{x^2}{2}\big) + \frac{1}{2}\big(x - \frac{x^2}{2}\big)^2 + \frac{1}{2}\big(x - \frac{x^2}{2}\big)^3 + \frac{1}{2}\big(x - \frac{x^2}{2}\big)^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

dove si è osservato che $o\big(x - \frac{x^2}{2}\big)^k = o(x^k)$ per ogni $k > 0$. Per quanto riguarda il coseno

$$\cos(x^5) = 1 + o(x^9)$$

in quanto il secondo controbuto non banale è di ordine 10. Infine

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x\sqrt{2} - \frac{1}{3!}(x\sqrt{2})^3 + o(x^4))$$

in quanto il contributo successivo è di ordine 5. Allora

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) - 1 + o(x^5) - x + \frac{1}{\sqrt{2}\,3!}(x\sqrt{2})^3 + o(x^4) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{6}x^3 + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il denominatore $D(x)$, la funzione $x^4\sin(1/x)$, seppur infinitesima, non si può approssimare in quanto l'argomento del seno va ad infinito. Sviluppando al primo ordine non banale la funzione $\sin(x)\ln(\cos(x))$ e osservando che l'argomento del logaritmo tende ad 1 si ha

$$\begin{aligned} \sin(x)\ln(\cos(x)) &= (x + o(x))\ln(1 + (cos(x) - 1)) = (x + o(x))((cos(x) - 1) + o(\cos(x) - 1) \\ &= (x + o(x))(-x^2/2 + o(x^2)) = -x^3/2 + o(x^3) \end{aligned}$$

quindi

$$D(x) = -x^3/2 + o(x^3) + x^4\sin(1/x) = x^3(-1/2 + o(1) + x\sin(1/x)) = -x^3/2(1 + o(1))$$

in quanto $x\sin(1/x)$ tende a zero. In conclusione

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^3(1 + o(1))} = \frac{x}{6}(1 + o(1)) \to 0^+$$

b) Si osservi che

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{((n-1)!+4^n)\left((-1)^n\, n+\ln^3(n)\right)}{(n!+n^{n/2})\left(\frac{-n}{n+1}\right)^n} = \frac{(n-1)!n(-1)^n(1+o(1))}{n!(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}(1+o(1))} \\
&= \frac{(1+o(1))}{e^{-1}(1+o(1))} \to e
\end{aligned}$$

dove a numeratore si sono utilizzati i confronti tra fattoriale ed esponenziale e tra potenze e logaritmo; a denominatore si è utilizzata la relazione

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e}$$

ed il confronto

$$\frac{n!}{(\sqrt{n})^n} \overset{Stirling}{=} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}{(\sqrt{n})^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+o(1)) \to +\infty$$

$\square$