Calcolo I - Corso di Laurea in Fisica - 04 Febbraio 2020
Soluzioni Scritto

1) *Data la funzione*

$$f(x) = x^2 \left(\frac{1}{x^2 + 2x + \frac{11}{10}} \right)^{1/2}$$

a) Determinare: il dominio di definizione; le equazione di eventuali asintoti; enventuali punti di non derivabilit''a.

b) Calcolare, se esistono, estremi relativi ed assoluti.

Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Svolgimento. $a)$ Il **dominio** di definizione della funzione è $\mathbb{R}$ in quanto il polinomio di secondo grado all'interno della radice non si annulla mai ed è sempre positivo. Inoltra la funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ in quanto composizione, e prodotto di funzioni di classe C^∞. Quindi on ci sono punti di non derivabilità. Per gli asintoti, si osservi che per $x \to \pm\infty$ si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) = x^2 \left(\frac{1}{x^2 + 2x + \frac{11}{10}} \right)^{1/2} &= x^2 \left(x^2 + 2x + \frac{11}{10} \right)^{-1/2} = \frac{x^2}{|x|} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{11}{10x^2} \right)^{-1/2} \\
&= |x| \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} + \frac{11}{10x^2} \right) + o\left(\frac{2}{x} + \frac{11}{10x^2} \right) \right) \\
&= |x| \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x} \right) \right) = |x| - \mathit{segno}(x) + o(1)
\end{aligned}$$

Quindi: $y = x - 1$ **è l'asintoto a** $+\infty$ **mentre** $y = -x + 1$ **è l'asintoto a** $-\infty$.

$b)$ Per vedere l'esistenza di estremi studiamo la monotonia della funzione attravero il segno della derivata prima:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \left(x^2 + 2x + \frac{11}{10} \right)^{-1/2} - \frac{x^2}{2} \left(x^2 + 2x + \frac{11}{10} \right)^{-3/2} (2x + 2) \\
&= \frac{1}{\left(x^2 + 2x + \frac{11}{10}\right)^{3/2}} \left(2x(x^2 + 2x + \frac{11}{10}) - \frac{x^2}{2}(2x + 2) \right) \\
&= \frac{1}{\left(x^2 + 2x + \frac{11}{10}\right)^{3/2}} \frac{x}{2} \left(4x^2 + 8x + \frac{44}{10} - (2x^2 + 2x) \right) \\
&= \frac{1}{\left(x^2 + 2x + \frac{11}{10}\right)^{3/2}} x \left(x^2 + 3x + \frac{11}{5} \right)
\end{aligned}$$

Il segno della derivata prima dipende solo dal segno del polinomio di terzo grado $x\left(x^2 + 3x + \frac{11}{5}\right)$. Le radici del polinomio di secondo grado sono

$$x_\pm = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 44/5}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1/5}}{2}$$

Da cui

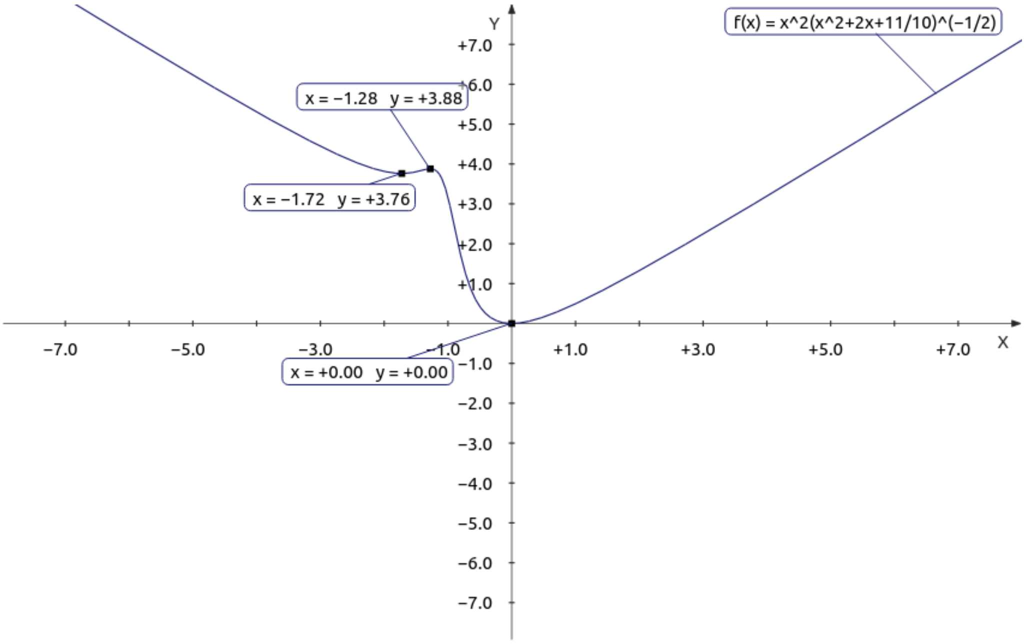
$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \left(\frac{-3\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}, \frac{-3\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \right) \cup (0, +\infty)$$

e

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in \left(-\infty, \frac{-3\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{-3\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, 0\right)$$

Quindi $\frac{-3\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ **è un minimo relativo,** 0 **è un minimo assoluto, mentre** $\frac{-3\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ **è un massimo relativo.**

Il grafico della funzione è



□

2) Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^x \ , & x \leq 0\,; \\ \frac{e^x \ln(1+3x)}{P(x)} \ , & x > 0 \end{cases}$$

dipendente dal polinomio $P(x) = a + bx + cx^2$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare i parametri a, b, c affinchè la funzione risulti continua e derivabile in $x = 0$.

Svolgimento. Imponiamo la condizione di continuità in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Dato che $f(0) = e^0 = 1$ e che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$, dobbiamo solo imporre che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \ln(1+3x)}{a + bx + cx^2} = 1$$

Dal momento che per $x \to 0^+$ si ha

$$f(x) = \frac{e^x \ln(1+3x)}{a + bx + cx^2} = \frac{3x(1 + o(1))}{a + bx + cx^2}$$

si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0\ ,\ b = 3$$

Per quanto riguarda la derivabilità in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ \in \mathbb{R}$$

Osservando che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

dobbiamo imporre che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x \ln(1+3x)}{3x + cx^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \ln(1+3x) - 3x - cx^2}{3x^2 + cx^3} = 1$$

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{e^x \ln(1+3x) - 3x - cx^2}{3x^2 + cx^3} &= \frac{(1 + x + o(x))\big(3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\big) - 3x - cx^2}{3x^2 + cx^3} \\ &= \frac{3x - \frac{9}{2}x^2 + 3x^2 + o(x^2) - 3x - cx^2}{3x^2 + cx^3} \\ &= \frac{x^2(-\frac{3}{2} - c) + o(x^2)}{3x^2 + cx^3} \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-\frac{3}{2} - c}{3} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c = -\frac{9}{2}$$

$\square$

3) Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k^2}\right)x^k$$

specificando gli intervalli di convergenza semplice, assoluta e uniforme.
***Facoltativo**: provare che* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k^2}\right)\frac{1}{2^k}<3/4$

Svolgimento. Posto

$$a_k:=\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k^2}\right)$$

si osservi che per $k\to+\infty$

$$a_k=\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k^2}\right)=\frac{1}{k}(1+o(1))$$

da cui segue che

$$\sqrt[k]{a_k}\to 1$$

ossia **il raggio di convergenza** $r=1$. Quindi la serie di potenze converge assolutamente $|x|<1$ e uniformemente per $x\in[a,b]\subseteq(-1,1)$. **Non converge per** $|x|>1$.

Studiamo la convergenza nei punti di frontiera $x=-1,1$. Per $\boxed{\text{x=1}}$ si ha

$$a_k1^k=\frac{1}{k}(1+o(1))$$

la serie **non converge per confronto asintotico con la armonica**.

Per $\boxed{\text{x=-1}}$ si ha

$$a_k(-1)^k=(-1)^k\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}$$

si tratta di una serie a termini di segno alterno. Non si può applicare Leibinz in quanto a_k non è monotona decrescente: infatti se k è pari

$$a_k>a_{k+1}\iff\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}>\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}\iff\frac{k+1}{k^2}>\frac{k}{(k+1)^2}\iff k^3+3k^2+3k+1>k^3$$

che è sempre verificata; se k è dispari

$$\begin{aligned}a_k>a_{k+1}&\iff\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\iff\frac{k-1}{k^2}>\frac{k+2}{(k+1)^2}\\&\iff k^3-k+k^2-1>k^3+2k^2\iff -k-1>k^2\end{aligned}$$

che non è verificata.

Tuttavia per $x=1$ la serie è **convergente**. Infatti $a_k(-1)^k$ è somma di $(-1)^k\frac{1}{k}$ che converge per Leibniz e di $\frac{1}{k^2}$ che converge per confronto integrale.

Per quanto riguarda la domanda facoltativa, diamo una stima della successione dei termini della serie a_k. Dividiamo a_k nelle sottosuccessioni dei pari e dispari. Per i pari

$$a_{2k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}=\frac{3}{4k}\quad,\quad k\in\mathbb{N}$$

che è monotona descrescente ed assume il valore massimo pari a $\frac{3}{4}$ per $k = 1$. Per i dispari si ha

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{2k-2}{(2k-1)^2} \quad , \quad k \in \mathbb{N} \; .$$

Per studiare la monotonia di a_{2k-1} studiamo la monotonia della funzione $f(x) = \frac{2x-2}{(2x-1)^2}$ per $x \geq 1$. Si osservi che

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)^2 - 4(2x-2)(2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{-8x^2 + 16x - 6}{(2x-1)^4}$$

e che il numeratore ha come radici $3/2$ ed $1/2$. Da questo segue che per $x > 0$ la funzione ha un massimo assoluto per $x = 3/2$. Di conseguenza la successione a_{2k-1} assumerà il valore massimo per $k = 1$ o $k = 2$. Per $k = 1$ si ha $a_1 = 0$ mentre per $k = 2$ si ha $a_3 = 2/9$. In conclusione $a_k \leq \max\{2/9, 3/4\} = 3/4$ per ogni k e, ricordando la somma della serie geometrica, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2} \Big) \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4} \frac{1}{2^k} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{3}{4} \Big(-1 + \frac{1}{1 - (1/2)} \Big) = \frac{3}{4}$$

□

4) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $(0, +\infty)$ della funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(x)\,(2\sqrt{x}+3)}{\ln^{6-3\alpha}(1+x)\,(x+3\sqrt{x}+2)^\alpha\,\sqrt{x}} \ .$$

Calcolare l'integrale per $\alpha = 2$ ossia $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)(2\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(x+3\sqrt{x}+2)^2}\,dx$.

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in quanto l'intervallo di integrazione non è limitato e la funzione a denominatore presenta sia uno zero per $x = 0$ e non è definita in $x = 0$. Negli intervalli $[a, b]$ per ogni $0 < a < b < +\infty$ la funzione è continua e limitata quindi integrabile. Inoltre la funzione è sia in 0 che ha $+\infty$ definitivamente di segno costante quindi possiamo applicare il confronto sintotico.

Per $x \to +\infty$ si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(x)\,(2\sqrt{x}+3)}{\ln^{6-3\alpha}(1+x)\,(x+3\sqrt{x}+2)^\alpha\,\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\ln(x)}{\ln^{6-3\alpha}(x)x^{\alpha+1/2}}(1+o(1)) = \frac{2}{\ln^{6-3\alpha-1}(x)\,x^\alpha}(1+o(1)) \ .$$

quindi f_α è integrabile a $+\infty$ se $\alpha > 1$; non è integrabile a $+\infty$ se $\alpha < 1$; mentre per $\alpha = 1$ è integrabile in quanto

$$f_1(x) = \frac{2}{x\ln^2(x)}(1+o(1)) \ .$$

Per $x \to 0^+$ si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(x)\,(2\sqrt{x}+3)}{\ln^{6-3\alpha}(1+x)\,(x+3\sqrt{x}+2)^\alpha\,\sqrt{x}} = \frac{3\ln(x)}{2^\alpha x^{6-3\alpha+1/2}}(1+o(1))$$

quindi f_α è integrabile in 0 se, e solo se, $6 - 3\alpha + 1/2 < 1 \iff \alpha > 11/6$.

In conclusione f_α **è integrabile in senso improprio in** $(0, +\infty)$ **se, e solo se,** $\alpha \in (11/6, +\infty)$

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 2$. Sostituendo $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ e integrando per parti si ha

$$\int \frac{\ln(x)(2\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(x+3\sqrt{x}+2)^2}\,dx = \int \frac{4\,\ln(t)\,(2t+3)}{t^2+3t+2)^2}\,dt = -\frac{4\,\ln(t)}{t^2+3t+2)} + \int \frac{4}{t(t^2+3t+2)}\,dt =$$

Per quanto riguarda il secondo termine, osservando che $(t^2+3t+2) = (t+1)(t+2)$ si ha la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2}$$

da cui segue che

$$A = 1/2 \quad , \quad B = -1 \quad , \quad C = 1/2$$

quindi

$$\int \frac{4}{t(t^2+3t+2)}\,dt = \int \frac{2}{t} - \int \frac{4}{t+1} + \int \frac{2}{t+2} = 2\ln|t| - 4\ln|t+1| + 2\ln|t+2| \ .$$

Quindi una primitiva della funzione integranda nella variabile t è

$$F(t) = -\frac{4\,\ln(t)}{t^2+3t+2)} + \ln\frac{t^2(t+2)^2}{(t+1)^4}$$

Infine
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)(2\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(x+3\sqrt{x}+2)^2}dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) - \lim_{t\to 0^+} F(t)$$
Si vede facilmente che $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$ mentre per $t \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}
F(t) &= -\frac{4\ \ln(t)}{t^2+3t+2)} + 2\ln(t) + 2\ln(t+2) - 4\ln(t+1) \\
&= \frac{-4\ \ln(t) + 4t^2\ln(t) + 6t\ln(t) + 4\ln(t)}{t^2+3t+2)} + 2\ln(2) + o(1) \\
&= \frac{4t^2\ln(t) + 6t\ln(t)}{t^2+3t+2)} + 2\ln(2) + o(1) \\
&= 2\ln(2) + o(1)
\end{aligned}$$

quindi
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)(2\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(x+3\sqrt{x}+2)^2}dx = -2\ln(2)$$

□

5) *Data l'equazione differenziale*

$$\dddot{x} - \ddot{x} = e^t$$

a) Trovare la soluzione generale dell'equazione.

b) Risolvere il problema di Cauchy $\ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 1$.

Svolgimento. Si tratta di una equazione differenziale lineare del terzo ordine a coefficienti costanti. Troviamo la soluzione generale dell'omogenea

$$\dddot{x} - \ddot{x} = 0$$

Le radici del polinomio caratteristico è $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ sono 0, con molteplicità 2, e 1. Quindi la generica soluzione dell'omogenea è

$$x_{om}(t) = A + Bt + Ce^t$$

Il termine noto è la funzione $f(t) = e^t$. Applichiamo il metodo di similitudine. Crchiamo la soluzione particolare della forma $y_1(t) = tKe^t$ dove il fattore aggiuntivo t è dovuto al fatto che 1 è radice del polinomio caratteristico con molteplicità 1. Quindi

$$K(3e^t + te^t) - K(2e^t + te^t) = e^t \iff Ke^t = e^t \iff K = 1$$

Quindi un soluzione particolare è $y_p(t) = te^t$ e la soluzione generale

$$x_{Gen}(t) = x_{om}(t) + y_p(t) = A + Bt + Ce^t + te^t$$

Per il problema di Cauchy si ha

$$x(0) = A + C = 1 \quad , \quad \dot{x}(0) = B + C + 1 = 0 \quad , \quad C + 2 = 0$$

da cui $C = -2$ mentre $B = 1$ e $A = 3$. In conclusione

$$x_{Cauchy}(t) = 3 + t + e^t(t - 2)$$

$\square$